目　　录

第一章　状态变量分析原理

一般用微分方程来描述物理系统或抽象系统，而常常用某一单个变量——例如力学系统中的位置——对于初始条件或输入信号的响应来研究任意一个系统的行为．虽然单个变量的响应可能是我们直接感兴趣的唯一结果，但是系统中还有其他的变量；例如位置的改变意味着系统中有速度和加速度变量．同样，电气系统中某一点电压的变化可能意味着系统中其他点电压的变化．如果这些其他的变量是独立的，例如在图 1.2 (a) 的系统中，对于某个位移 y，速度 $\frac{dy}{dt}$ 可以具有任何数值而与位移的数值无关；则完整地描述这个系统的**状态**既需要知道 y 又需要知道 $\frac{dy}{dt}$．一般说来，要完整地描述任意一个系统都需要知道其全部独立变量．

在状态变量分析中，将系统的所有状态都作为响应，这就可能更充分地了解系统的行为和特性．然而，这种分析方法需要联立求解为数众多的一阶微分方程；这通常用矩阵代数来运算，把系统的状态看成是一个向量，而系统的各个独立变量便是这个向量的各个分量．这就导致了用一个向量微分方程来描述一个系统．本章介绍系统方程的矩阵表示法和向量微分方程的求解法．由于把系统的状态看成是一个向量，我们便能够在一空间中用几何术语

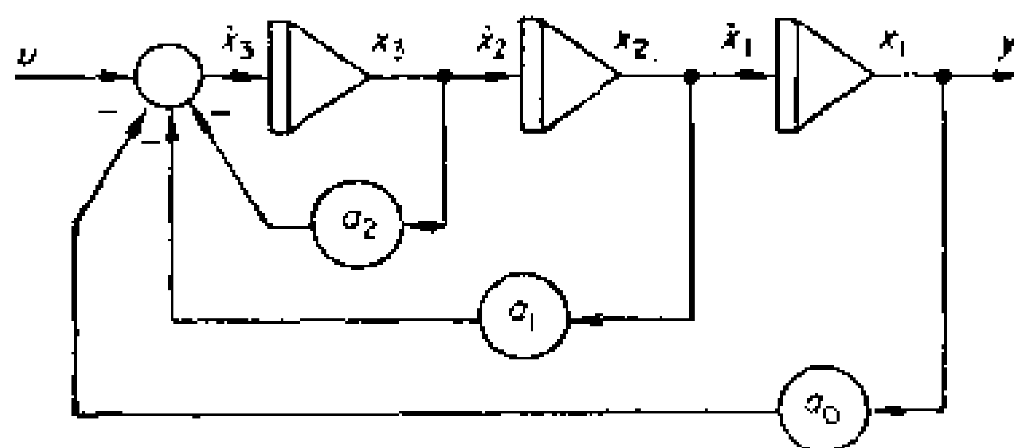


图 1.1　三阶微分方程的示意图

来解释很多状态变量分析的问题(参阅 1.2 节末). 因此人们常常使用**状态空间**分析这个词.

1.1 微分方程的矩阵表示法

对许多问题的研究往往得出一个关于输入 u 与输出 y 的线性常系数微分方程,在三阶情况下,其一般形式为

$$\frac{d^3y}{dt^3} + a_2\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0y = u \tag{1.1}$$

并可画出示意图如图 1.1 所示. 各积分器的输出分别为

$$x_1 = y,\ x_2 = \dot{y},\ x_3 = \ddot{y}$$

这些导数不一定代表该系统中实际存在的变量. 各积分器的输入分别为 $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$, 并可写出一阶方程组:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= x_3\\ \dot{x}_3 &= -a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3 + u\end{aligned} \tag{1.2}$$

写成矩阵形式就是

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u \tag{1.3}$$

主对角线的上方数值为 1 的元素表示了积分器的直接串联联接,而所有的反馈系数都出现在第 3 行. 式(1.3)的一般形式体现了形如式(1.1)且对应方块图如图 1.1 这样一类方程的特征. 在本例中,式(1.2)中头两个方程的表达式是最简单的,更为一般的情况是在方程的右边还有其他项,表示积分器还有其他输入信号.

作为一个简单的例子,图 1.2 (a) 的弹簧-质量-阻尼器系统的方程为

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + F\frac{dy}{dt} + Ky = Ku \tag{1.4}$$

并可以画出方块图,如图 1.2 (b) 所示. 对应的矩阵关系为

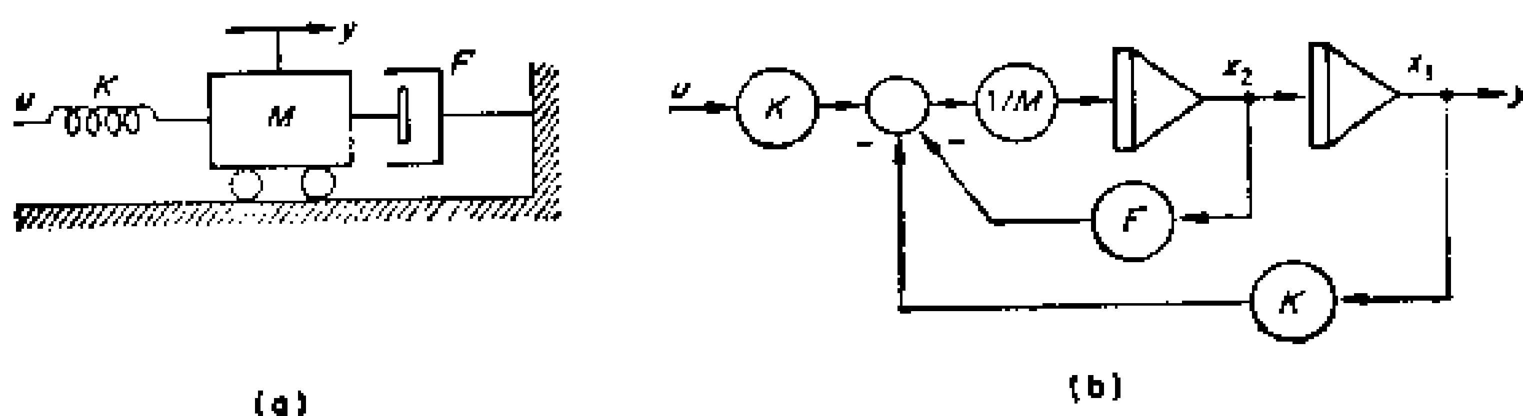


图 1.2　力学系统和方程的示意图

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/M & -F/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K/M \end{bmatrix} u \tag{1.5}$$

对于图 1.3 (a) 的 RC 电路，可写出两个节点方程式

$$\begin{aligned} \frac{v_1 - v_2}{R_3} + \frac{v_1 - u_1}{R_1} + C_1 \frac{dv_1}{dt} = 0 \\ \frac{v_2 - v_1}{R_3} + \frac{v_2 - u_2}{R_2} + C_2 \frac{dv_2}{dt} = 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

并可画出方块图，如图 1.3 (b) 所示，于是求得矩阵表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right) & \frac{1}{C_1 R_3} \\ \frac{1}{C_2 R_3} & -\frac{1}{C_2}\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2}\right) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2 R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

这里积分器之间的联系不再是简单的直接相连的通道了.

如前所述，积分器的输出所代表的变量不一定可解释为系统中直接存在的某些量. 图 1.2 中各状态变量直接与系统变量有关，也就是位移 (x_1) 和速度 (x_2). 而图 1.3 (a) 中的节点电压也直接出现在图 1.3 (b) 中. 然而，如果仅仅需要了解 RC 电路中 u_2 和 v_1 的关系，则可以从式 (1.6) 中消去 v_2，变成一个方程式

$$a_2 \frac{d^2 v_1}{dt^2} + a_1 \frac{dv_1}{dt} + a_0 v_1 = b_0 u_2 \tag{1.8}$$

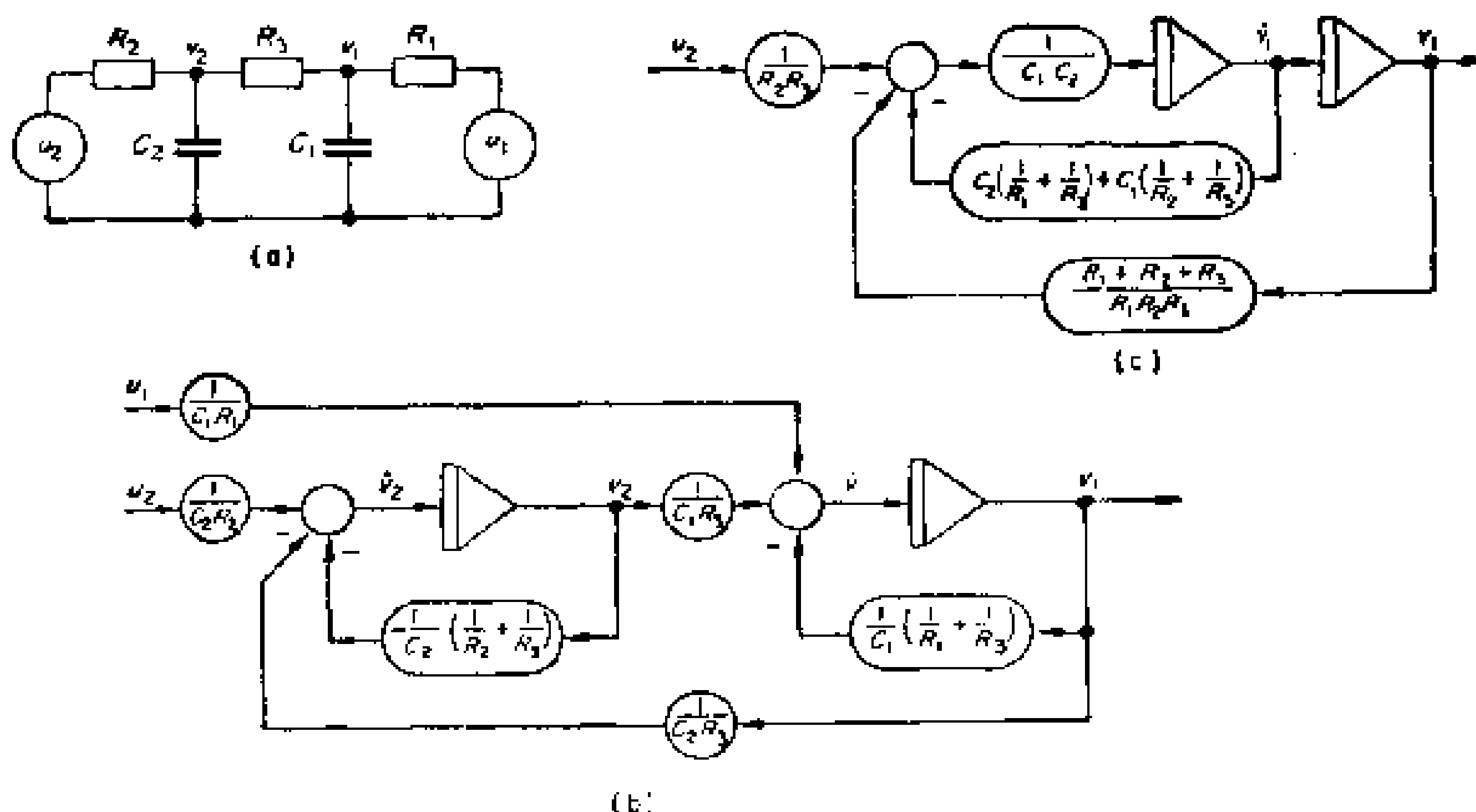


图 1.3 (a) RC 电路; (b) 微分方程的示意图; (c) u_2 和 v_1 之间的输入输出关系修改后的示意图

它具有图 1.3(c) 那样的方块图，其积分器简单地直接相连；两个变量现在是 v_1 和 $\dot{v}_1$，而 $\dot{v}_1$ 并不是在电路中能直接测量的变量。

1.2 状态向量微分方程

任何系统如能用一组一阶微分方程描述，我们就可以用向量形式把这些方程式表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{1.9}$$

这里各个变量（积分器的输出）是状态向量 $\boldsymbol{x}$ 的分量，而状态向量给出了系统状况或状态的全部信息，因此

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

分别是状态向量、状态向量的导数和输入向量，而

A 是系统矩阵，表示系统的内在联系。

B 是输入矩阵，表示输入信号在系统内的分布。

在积分器直接串联时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有式(1.3)那样的特殊形式，这时矩阵 A 叫做**同伴**形矩阵. x_1 及其各次导数叫做**相**变量.

对于单输入 u 的情况，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 退化为一个向量 $\boldsymbol{b}$，这时状态方程式是

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u \tag{1.10}$$

观测到的输出量 y 可能是单个状态变量，如图 1.1 和图 1.2 所示，也可能是若干个状态变量的组合，并且可能含有直接从输入信号来的分量，即

$$y = [c_1 \cdots c_n]\boldsymbol{x} + du = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + du \tag{1.11a}$$

另外，输出量也可能是多变量的并且又含有输入信号的分量，这时可把输出量写成

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \tag{1.11b}$$

因此，我们把一般的多变量系统表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{1.12a}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \tag{1.12b}$$

而把单输入单输出系统表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u \tag{1.13a}$$

$$y = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + du \tag{1.13b}$$

一般关系式(1.12)和(1.13)可以用如图 1.4(a)和 1.4(b)所示的方块图来表示，图中双线表示多变量信号通道，复式积分器包括每个状态变量各自的积分器 $I_1, \cdots, I_n$. 一般的二阶系统(这里略去了 $\boldsymbol{D}$)的方程式是

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{1.14a}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{1.14b}$$

在图 1.4(c)中已把它表示出来. 图中每个积分器都有一个自反馈项，对应于在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 主对角线上的一个元素. 一般来说，每个积分器的输出端通过矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的一个元素接到其他积分器的输入端. 由状态变量的组合构成输出量这种做法——在列写式

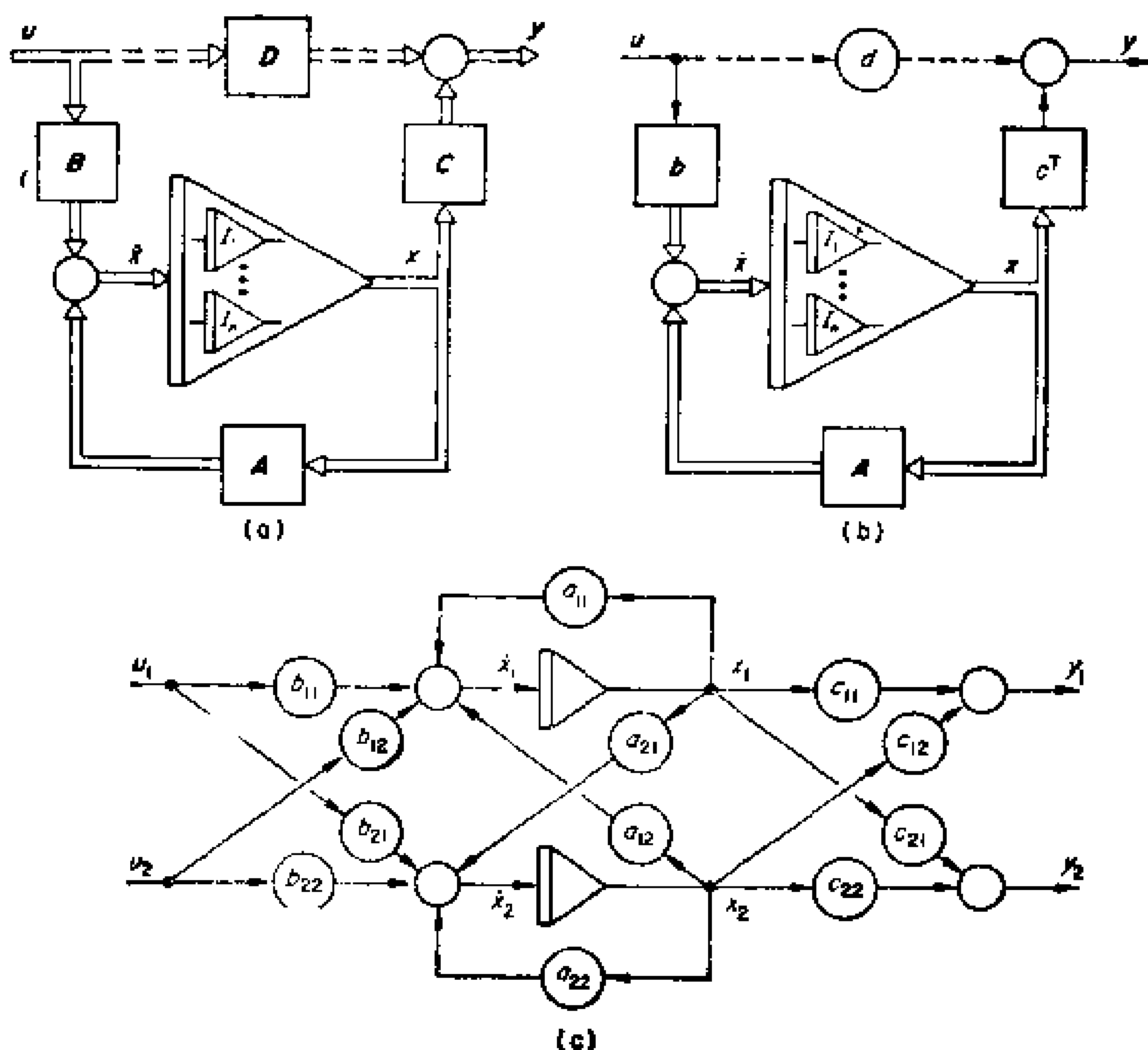


图 1.4 向量微分方程：(a) 多输入多输出；(b) 单输入单输出；(c) 从输入到输出没有直接通道的一般二阶系统

(1.11) 时曾提及——能够用来求得某个状态变量，而这个状态变量在特定的分析中是不能直接得到的．就图 1.5(a) 的系统而言，状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 \\ 0.25 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad (1.15)$$

而如果仅仅需要得到 x_1 和 u 之间的关系，则可以从式 (1.15) 中消去 x_2，得

$$\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 + 2x_1 = u \qquad (1.16)$$

式中 x_1 和 $\dot{x}_1$ 是相应系统的状态变量 (图 1.5 b).

假使现在必须从图 1.5 (b) 得到原来的状态变量 x_2. 式 (1.15) 的第一行是

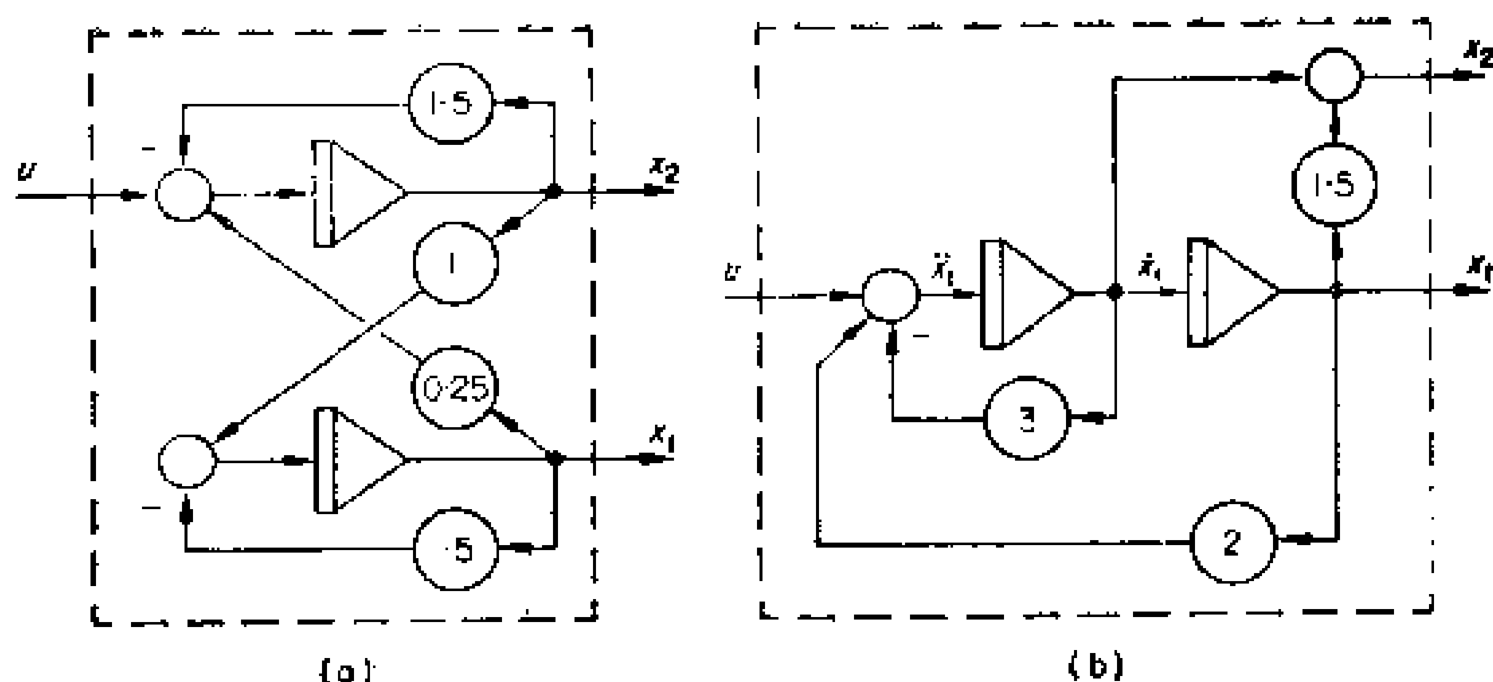


图 1.5　同一个系统的两种表示法

$$\dot{x}_1 = -1.5x_1 + x_2 \tag{1.17a}$$

由此得

$$x_2 = \dot{x}_1 + 1.5x_1 \tag{1.17b}$$

于是 x_2 可以如图 1.5 (b) 所示那样重现．实际上，尽管图 1.5 (a) 和 1.5 (b) 虚线框内的系统结构不同，但是两者的 u 和 x_1, x_2 间的关系却是相同的．这就说明了状态变量分析中的一个重要概念：分析一个系统时，先分析一个与之关联的系统，然后再把这个关联系统的输出量进行转换，这样可能会容易些．

几　何　解　释

在 1.2 节的分析中，状态向量的分量 $x_1, \cdots, x_n$ 可看成是状态向量在一组坐标轴上的投影．对于二维和三维系统来说，这是很直观的．对于图 1.2 和图 1.3 的系统，状态向量仅仅是二维的，其分量是速度和位置，或者两个节点的电压．如果系统在 $t=0$ 时刻有一初始状态 $\boldsymbol{x}(0) \neq \boldsymbol{0}$，则由于系统的动力学性质，在没有任何输入 $\boldsymbol{u}$ 的情况下，系统状态 $\boldsymbol{x}$ 一般也要发生变化．例如图 1.2，假设系统有一个初速度，则位置必将随着时间而变化，状态向量将描绘出一条轨迹，类似于通常的相平面分析法得到的结果．在任意瞬间，变化的方向由下式给出：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

这就确定了经过某个状态点的自由运动轨迹的方向；参看图 1.6(a)．如果有单个输入，则

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u$$

附加的分量 $\boldsymbol{b}u$ 使得系统状态偏离其自由运动轨迹，参看图 1.6(b)．

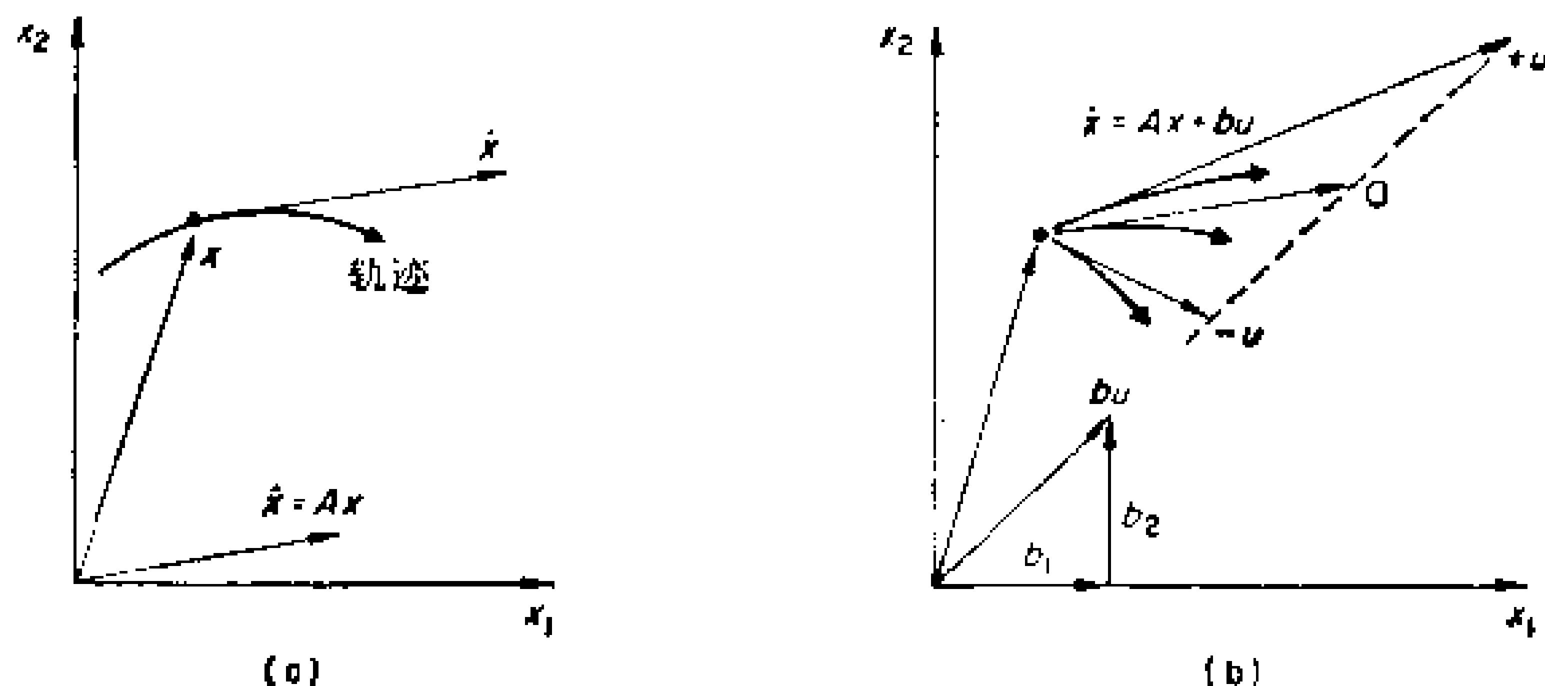


图 1.6　系统轨迹：(a) 自由运动轨迹；(b) 有输入信号时的轨迹

对于单个输入，$\boldsymbol{b}u$ 的方向由系数 b_1 和 b_2 确定，向量 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 的端点必定在图 1.6b 中的虚线上．然而，如果有二维的输入，它确定一个输入分量 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$，则从原理上讲，适当选择 u_1 和 u_2，可以使 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 处于任何方向，并且只要使 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$，则状态可以静止不变，即

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{1.18}$$

作为一个例子，研究图 1.3 (a) 的系统，它有两个输入，因此适当选择 u_1 和 u_2，可以使系统保持在任何状态．令 $R_1 = 1$，$R_2 = 4$，$R_3 = 2$，这时状态方程为

$$\begin{bmatrix} C_1\dot{v}_1 \\ C_2\dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.75 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

如果必须使系统保持在状态

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

则 $\boldsymbol{u}$ 的相应数值应为

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.75 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

给出

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}2.5\\-1\end{bmatrix} \tag{1.22}$$

若施加这样大小的 $\boldsymbol{u}$，采用式(1.19)中的电阻数值，则可以很容易地算出对应的电压 v_1 和 v_2，这就是式(1.20)所表示的数值；此时电容器既不充电也不放电，电路状态保持不变.

1.3　状态向量微分方程的变换

为了获得向量微分方程在 s 域的表达式，有必要扼要地讲一下一阶微分方程的变换，因为两者是很相似的.

一　阶　方　程

一阶微分方程式

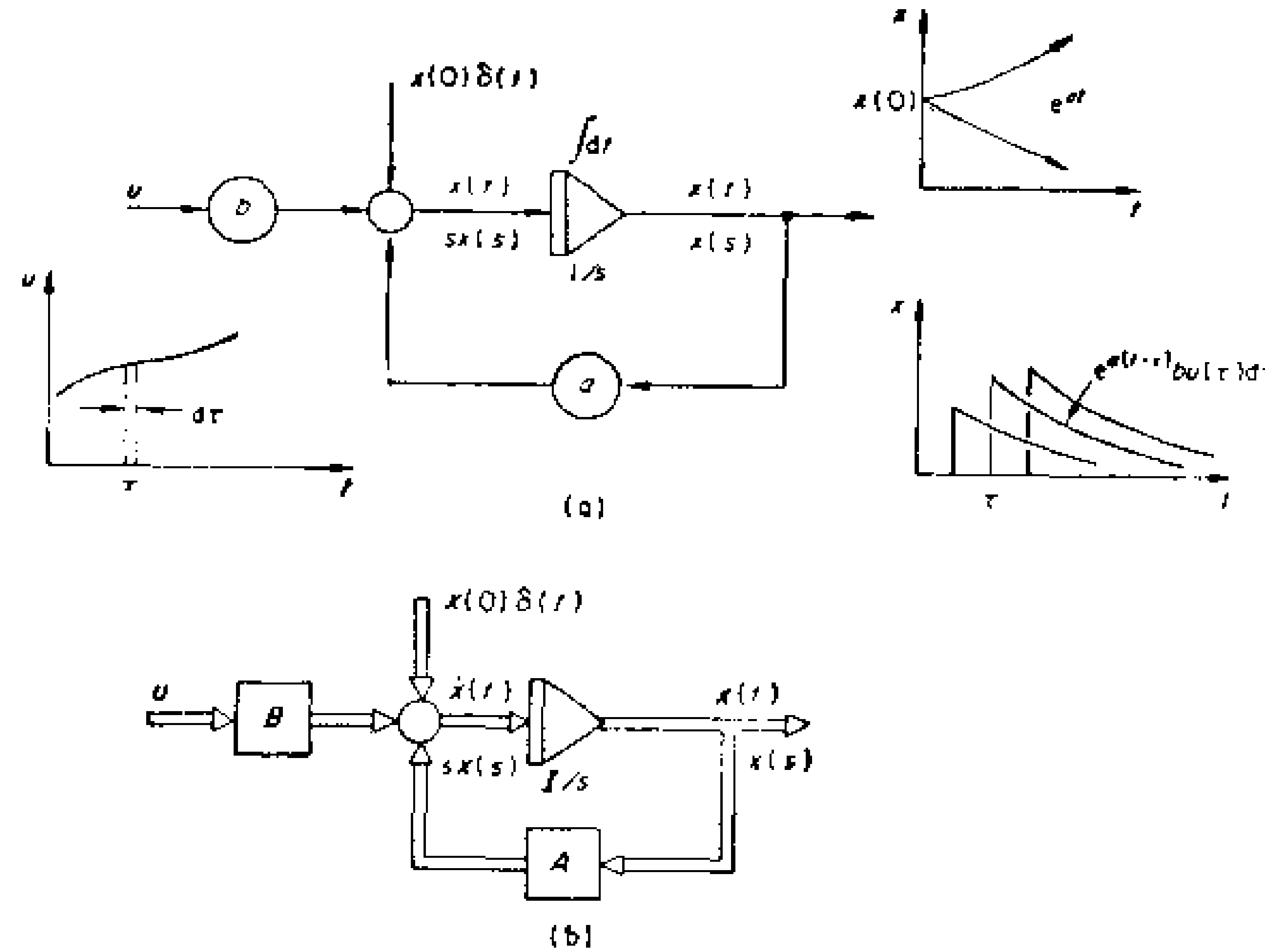


图 1.7　微分方程：(a) 一阶方程；(b) 向量方程

$$\dot{x} = ax + bu \tag{1.23}$$

可以用图 1.7 (a) 描述，对应于初始条件 $x(0)$ 的解为

$$x(t) = x(0)e^{at} \tag{1.24}$$

式中，e^{at} 是系统的固有振型. 可以用加到积分器输入端的脉冲 $x(0)\delta(t)$ 表示初始条件（参阅附录 1.1），所加脉冲立即使积分器有一输出 $x(0)$，它等于脉冲的面积（即积分）. 于是系统产生式(1.24) 的响应. 它是渐增的还是衰减的，取决于 a 的符号. 对于一般的输入 $u(t)$ 的响应由卷积分确定，即

$$x(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \tag{1.25}$$

这意味着将 $u(t)$ 视为由一系列的具有面积为 $u(\tau)d\tau$ 的脉冲组成，每个脉冲从 $t=\tau$ 开始在输出端产生一个固有振型的响应，其式为

$$e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \tag{1.26}$$

式 (1.25) 所确定的总响应是所有单个的脉冲响应之和.

另外，微分方程可以用拉普拉斯变换法求解，式(1.23)的拉普拉斯变换为

$$sx(s) - x(0) = ax(s) + bu(s) \tag{1.27a}$$

或

$$(s-a)x(s) = x(0) + bu(s) \tag{1.27b}$$

式中，$x(0)$ 是初始条件. 变换后的方程又可以表示为

$$x(s) = \frac{x(0)}{s-a} + \frac{bu(s)}{s-a} \tag{1.28}$$

其特征是在复数平面上于 $s=a$ 处有一个极点，它对应于固有振型 e^{at}. $\frac{b}{s-a}$ 为系统的传递函数. 最后，上式每一项都可以经拉普拉斯反变换变回到时间域.

向量微分方程

用拉普拉斯变换解状态向量微分方程通常这样进行：将矩阵

方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ 展开为若干单个方程式.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n+b_{11}u_1+\cdots+b_{1n}u_n \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n+b_{n1}u_1+\cdots+b_{nn}u_n \end{aligned} \tag{1.29}$$

然后将这些单个方程式分别进行拉普拉斯变换得

$$\begin{aligned} sx_1(s)-x_1(0) &= a_{11}x_1(s)+\cdots+a_{1n}x_n(s)+b_{11}u_1(s)+\cdots+b_{1n}u_n(s) \\ &\vdots \\ sx_n(s)-x_n(0) &= a_{n1}x_1(s)+\cdots+a_{nn}x_n(s)+b_{n1}u_1(s)+\cdots+b_{nn}u_n(s) \end{aligned} \tag{1.30}$$

并且把它们改写成矩阵形式

$$s\begin{bmatrix} x_1(s) \\ \vdots \\ x_n(s) \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(s) \\ \vdots \\ x_n(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}\cdots b_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ b_{n1}\cdots b_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(s) \\ \vdots \\ u_n(s) \end{bmatrix} \tag{1.31}$$

或

$$s\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(s)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)$$

最后写成

$$s\boldsymbol{x}(s)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(s)+\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s) \tag{1.32a}$$

或

$$[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{x}(s)=\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s) \tag{1.32b}$$

这和一阶微分方程(1.27)具有同样的形式，只是方程中的变量现在是向量而不是单个变量. 按式(1.32a)的形式可以画出方块图如图1.7(b)所示，图中 $\boldsymbol{x}(0)\delta(t)$ 为初始条件脉冲向量，而积分器传递矩阵

$$\boldsymbol{I}/s=\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

代表在每个信号通道中的积分器.

可以把一阶微分方程(1.27b)写成

$$x(s)=(s-a)^{-1}x(0)+(s-a)^{-1}bu(s)$$

或

$$x(s)=\frac{x(0)}{s-a}+\frac{bu(s)}{s-a}$$

对上式每一项可以分别地进行反变换. 类似地, 可以把矩阵方程(1.32b)写成

$$\boldsymbol{x}(s)=[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{x}(0)+[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s) \tag{1.33}$$

但是为了得到相应于式(1.28)的形式, 必须算出 $[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]$ 的逆阵, 于是得

$$\boldsymbol{x}(s)=\frac{\operatorname{adj}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]}{\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]}[\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)] \tag{1.34}$$

或展开为

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ \vdots \\ x_n(s) \end{bmatrix}=\frac{1}{D(s)}[\operatorname{adj}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]]\left[\begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11}\cdots b_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ b_{n1}\cdots b_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(s) \\ \vdots \\ u_n(s) \end{bmatrix}\right] \tag{1.35}$$

式中, $D(s)$ 是系统的特征方程. 在一些特定的数值 s_k 上, $D(s_k)=0$, 出现系统的极点. 在矩阵代数的教科书中称之为**特征值**, 其符号为 λ_k. 详细地展开式(1.35)就得到由全部初始条件和全部输入引起的在任一状态处的变换信号; 因此, 虽然表达式很复杂, 但是可以得到全部信息. 必须注意, 由于 $\frac{1}{D(s)}$ 是所有状态变量的公共因子, 因此很明显, 每个极点在每个状态变量中都会出现. 于是, 任意输入或任意初始条件都会激发起所有的固有振型, 而这些振型在每个状态变量中都会出现(特殊的情况参阅习题1.6和第五章).

对一个具有

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$$

的一般二阶系统，我们有

$$[sI-A]=\begin{bmatrix}(s-a_{11}) & -a_{12}\\ -a_{21} & (s-a_{22})\end{bmatrix}$$

而

$$[sI-A]^{-1}=\frac{1}{(s-a_{11})(s-a_{22})-a_{12}a_{21}}\times\begin{bmatrix}(s-a_{22}) & a_{12}\\ a_{21} & (s-a_{11})\end{bmatrix} \tag{1.36}$$

因此极点满足方程式

$$(s-a_{11})(s-a_{22})-a_{12}a_{21}=0$$

若 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 都是正数，则极点在 s 平面的右半部，并且系统实际上是不稳定的．但是，对目前来说，这个具体细节在理论上是无关重要的．最后，可以求得每个状态变量的表达式为

$$x_1(s)=\frac{(s-a_{22})x_1(0)+a_{12}x_2(0)}{D(s)}+\frac{(s-a_{22})\{b_{11}u_1(s)+b_{12}u_2(s)\}+a_{12}\{b_{21}u_1(s)+b_{22}u_2(s)\}}{D(s)}$$

$$x_2(s)=\frac{a_{21}x_1(0)+(s-a_{11})x_2(0)}{D(s)}+\frac{a_{21}\{b_{11}u_1(s)+b_{12}u_2(s)\}+(s-a_{11})\{b_{21}u_1(s)+b_{22}u_2(s)\}}{D(s)} \tag{1.37}$$

式中，等号右边第一项为对初始条件的响应，第二项为对输入 $u_1(s)$ 和 $u_2(s)$ 的响应．

作为一个简单的例子，图 1.8 的系统有

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix};\quad b=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \tag{1.38}$$

特征方程为

$$\det[sI-A]=s(s+3)+2=s^2+3s+2$$

$$= (s+1)(s+2) = 0$$

特征值(极点)为 $\lambda = -1, -2$. $\boldsymbol{x}(s)$ 的矩阵表达式为

$$\boldsymbol{x}(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix}(s+3) & 1 \\ -2 & s\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}x_1(0) \\ x_2(0)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix} u(s)\right] \quad (1.39)$$

于是有

$$x_1(s) = \frac{(s+3)x_1(0) + x_2(0)}{(s^2+3s+2)} + \frac{u(s)}{(s^2+3s+2)} \quad (1.40a)$$

$$x_2(s) = \frac{-2x_1(0) + sx_2(0)}{(s^2+3s+2)} + \frac{su(s)}{(s^2+3s+2)} \quad (1.40b)$$

系统的极点为两个状态变量所共有，并且初始条件在状态变量零极点图上构成一个零点(参阅附录 1.1)；对于同样的初始条件向量，在两个状态变量的零极点图上构成的零点是不相同的，相应于两个状态变量具有不同的时间响应．对于初始条件

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix} \quad (1.40c)$$

零点位置如图 1.8 所示．式(1.40)等号右边的第二项是通常的对于输入的传递函数，本来不用状态空间法就可以直接把它求出来．

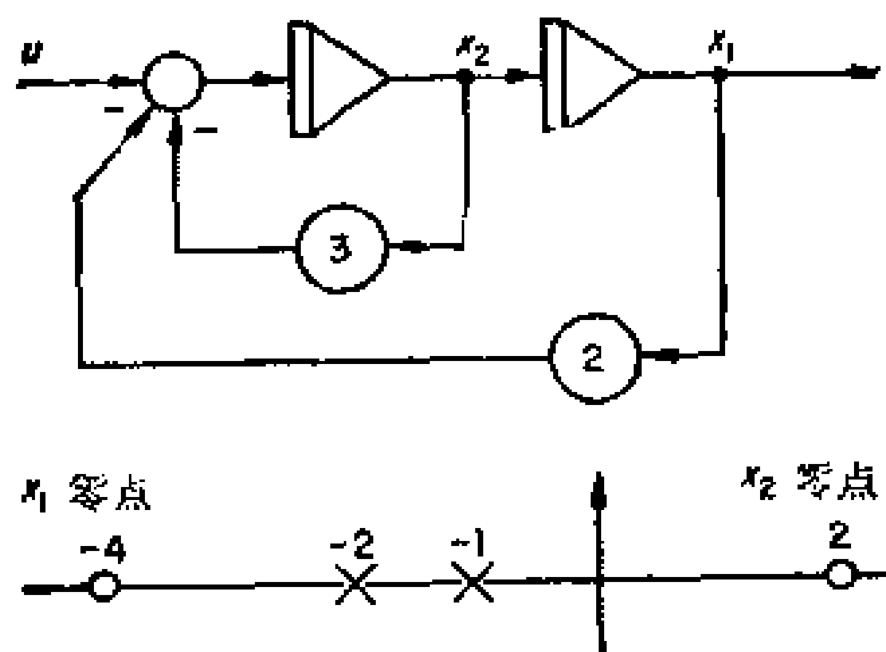


图 1.8 初始条件对应的零点

1.4 转 移 矩 阵

上面的结果表明用状态变量分析法可以得到所研究系统中全

部响应的 s 域表达式。然而，最终可能要求得到时间域的响应，这就必须对 s 域表达式作反变换。由式 (1.39) 可以求得图 1.8 系统的初始条件响应：

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} (s+3) & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

由于矩阵的所有元素都有同样的极点，可将每个元素用部分分式展开，得

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right) & \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right) \\ \left(\frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+2}\right) & \left(\frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \tag{1.41a}$$

将式 (1.41a) 反变换得：

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2e^{-t} - e^{-2t}) & (e^{-t} - e^{-2t}) \\ (-2e^{-t} + 2e^{-2t}) & (-e^{-t} + 2e^{-2t}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \tag{1.41b}$$

这就给出了由初始条件决定的各状态的时间响应。可以把式 (1.41b) 写成

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \tag{1.42}$$

式中，$\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是状态的**转移**矩阵，它在状态变量分析中具有重要的意义。可以认为，转移矩阵构成了系统从初始条件向量到状态向

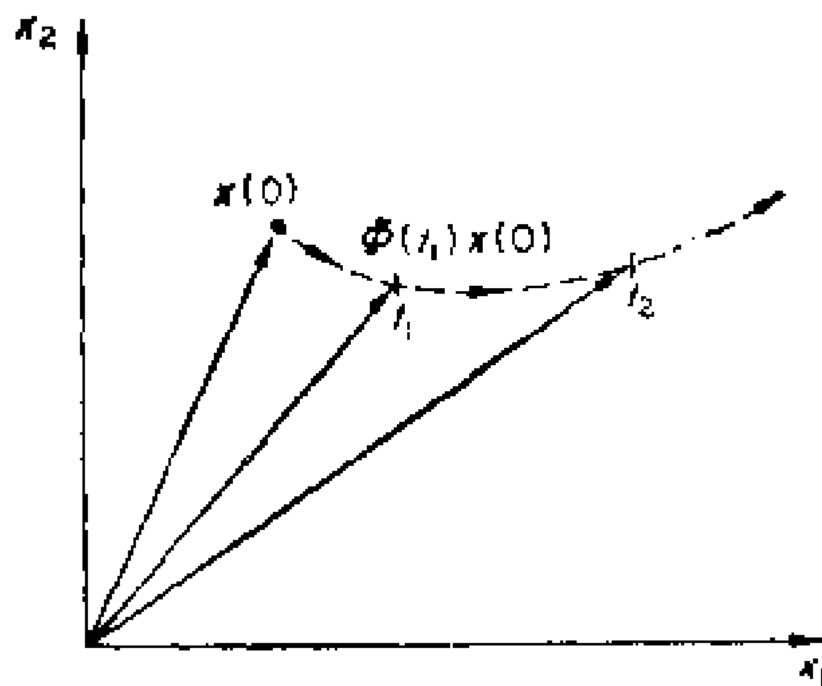


图 1.9 转移矩阵的应用

量的不断地变化着的转移，如图 1.9 所示。

将一阶微分方程的解和状态向量方程的解再比较一下，便可用稍许不同的方法求得转移矩阵，一阶方程为

$$\dot{x} = ax + bu$$

由式 (1.24) 和 (1.25) 得到解的一般形式为

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}u(\tau)d\tau \tag{1.43}$$

状态向量方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{1.44}$$

当 $\boldsymbol{u}$ 为零时其解为

$$\boldsymbol{x} = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) \tag{1.45}$$

式中，$e^{\boldsymbol{A}t}$ 是矩阵指数，像式 (1.41b) 那样，它由各个指数项组成，并且就是转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$. 因为

$$\frac{de^{\boldsymbol{A}t}}{dt} = \boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t}$$

将式 (1.45) 微分得

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) \tag{1.46}$$

当 $\boldsymbol{u} = 0$ 时，表达式 (1.45) 和 (1.46) 满足式 (1.44). $e^{\boldsymbol{A}t}$ 在向量微分方程解中的作用和 e^{at} 在一阶微分方程解中的作用相似. $e^{\boldsymbol{A}t}$ 或 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的一般性质和 e^{at} 相似，扼要列出如下：

e^{at}	$\boldsymbol{\Phi}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}$
$(t=0)\quad 1$	$\boldsymbol{I}$
$e^{at_1}e^{at_2} = e^{a(t_1+t_2)}$ $(e^{at})^{-1} = e^{-at}$ $(e^{at})^n = e^{ant}$	$\boldsymbol{\Phi}(t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_2) = \boldsymbol{\Phi}(t_1+t_2)$ $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t) = \boldsymbol{\Phi}(-t)$ $\boldsymbol{\Phi}^n(t) = \boldsymbol{\Phi}(nt)$

由于将 s 域的状态向量方程 (1.33) 反变换即可求得转移矩阵，于是有

$$\mathscr{L}^{-1}[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1} = \mathscr{L}^{-1}\frac{\operatorname{adj}[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]}{\det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]} = e^{\boldsymbol{A}t} \tag{1.47}$$

式中，$\mathscr{L}^{-1}$ 表示拉普拉斯反变换。

有输入时状态向量方程解的一般形式——类似于一阶微分方程解的一般形式的方程(1.43)——为

$$\boldsymbol{x}=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \tag{1.48a}$$

$$=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \tag{1.48b}$$

式(1.48)中各个积分项是标量积分. 对于式(1.42)的一般二阶系统,积分分量分别是

$$x_1(t)=\int_0^t \phi_{11}(t-\tau)\{b_{11}u_1(\tau)+b_{12}u_2(\tau)\}d\tau$$

$$+\int_0^t \phi_{12}(t-\tau)\{b_{21}u_1(\tau)+b_{22}u_2(\tau)\}d\tau$$

$$x_2(t)=\int_0^t \phi_{21}(t-\tau)\{b_{11}u_1(\tau)+b_{12}u_2(\tau)\}d\tau$$

$$+\int_0^t \phi_{22}(t-\tau)\{b_{21}u_1(\tau)+b_{22}u_2(\tau)\}d\tau \tag{1.49}$$

对于图1.8的系统,转移矩阵如式(1.41b)所示,由式(1.48)得到该系统对阶跃输入的响应分量为

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\int_0^t\begin{bmatrix}(2e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}) & (e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)})\\(-2e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)}) & (-e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)})\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u_2d\tau \tag{1.50}$$

式中,u_2 是阶跃输入的幅度. 响应 $x_1(t)$ 可计算如下:

$$x_1(t)=\left(\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right)u_2 \tag{1.51}$$

对于这样简单的例子,用转移矩阵方法求取式(1.51)是事倍功半的,而事实上,只要参照图1.8中系统的零极点图,并考虑到阶跃输入在原点处增加一个极点,用附录1.2中介绍的留数计算法即可求得此结果.

转移矩阵的计算

根据关系式

$$\mathscr{L}^{-1}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}=e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{\Phi}(t)$$

将 s 域的状态变量方程反变换即可求得转移矩阵. 然而，这是一个繁琐的方法. 如果可以直接从 $\boldsymbol{A}$ 计算 $e^{\boldsymbol{A}t}$，那就比较方便了.

由于矩阵指数可以表示为一个幂级数，

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{\Phi}(t)=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{\boldsymbol{A}^2t^2}{2!}+\cdots+\frac{\boldsymbol{A}^kt^k}{k!}+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^kt^k}{k!} \tag{1.52}$$

所以将 $\boldsymbol{A}$ 的各次幂加起来，就可得到转移矩阵. 但是由此不能直接得到 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的各个分量的闭合式，事实上这些分量以级数的形式出现时，很难认出它们含有哪些指数成分. 作为叙述这一原理的一个较为特别的例子，我们来研究图 1.10 的系统.

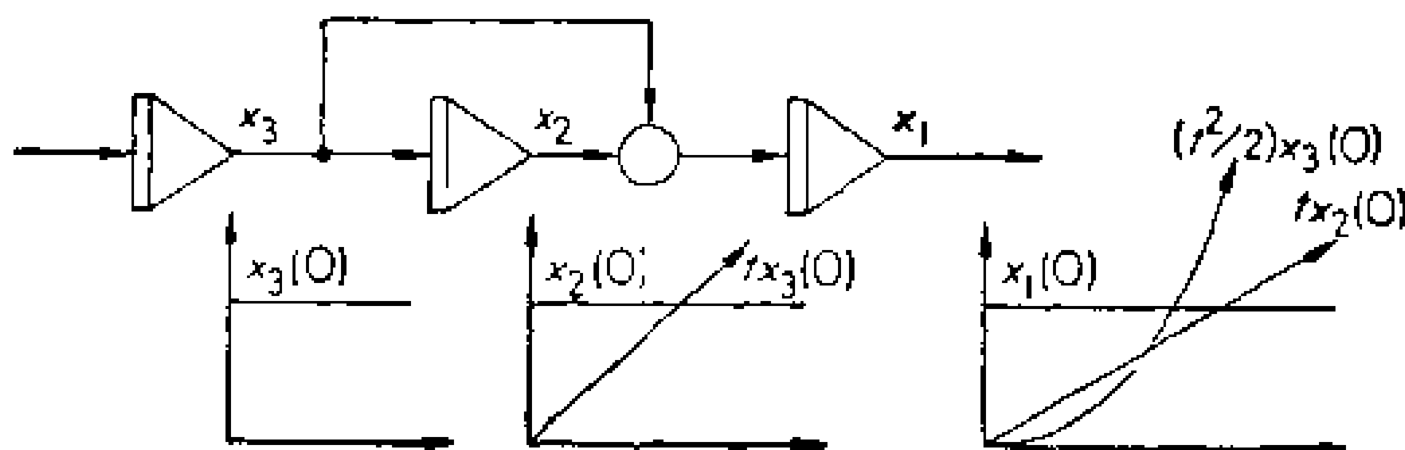


图 1.10 对初始条件的开环响应

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix} \tag{1.53}$$

可以求得 $\boldsymbol{A}$ 的各次幂为

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{A}^3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \tag{1.54}$$

并且全部更高次幂均为零. 于是，可把转移矩阵写为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{\boldsymbol{A}^2t^2}{2}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\frac{t^2}{2}$$

$$=\begin{bmatrix}1&t&t+t^2/2\\0&1&t\\0&0&1\end{bmatrix} \tag{1.55}$$

这是一个开环系统,各个积分器或者保持着初始条件,或者仅被前面的积分器的输出所驱动. 若系统有反馈通道,则在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中将有其他不为零的元素,而 $\boldsymbol{A}$ 的更高次幂就不再像式(1.54)那样全为零,它们构成 t 的各次幂的连续级数,对应于系统的过渡分量.

可以根据凯莱-哈密尔顿定理推出求 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的闭合表达式的简便方法. 凯莱-哈密尔顿定理指出,每个矩阵满足它自己的特征方程. 这意味着若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征方程

$$\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0=0 \tag{1.56}$$

则

$$\boldsymbol{A}^n+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} \tag{1.57}$$

这些关系式构成了矩阵的许多有用的运算法的基础,特别是由此可得到计算矩阵指数 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 的一种方法.

作为应用式(1.56)和(1.57)的一个例子,假如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix}$$

特征方程为

$$s^2+3s+2=0 \tag{1.58}$$

因而按凯莱-哈密尔顿定理有

$$\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} \tag{1.59}$$

这很容易验证:

$$\begin{bmatrix}-2&-3\\6&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&3\\-6&-9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \tag{1.60}$$

由式(1.57)可见,一个 $n\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意次幂都可以用 $\boldsymbol{A}$ 的直到 $n-1$ 次的低次幂的组合来表示. 若将式(1.59)写成

$$A^2 = -3A - 2I$$

则

$$A^3 = AA^2 = A(-3A - 2I) = -3A^2 - 2A$$
$$= 7A + 6I \tag{1.61}$$

这也很容易验证，因为

$$A^3 = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -14 & -15 \end{bmatrix}; \quad 7A + 6I = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ -14 & -21 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -14 & -15 \end{bmatrix} \tag{1.62}$$

同样可以验证

$$A^4 = AA^3 = 7A^2 + 6A = -15A - 14I \tag{1.63}$$

于是可以把一个 $n \times n$ 的矩阵 A 的一般幂级数

$$f(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_k A^k + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \tag{1.64}$$

简化为这样的形式：

$$f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k A^k \tag{1.65}$$

式中，系数 b_k 像式(1.61)和式(1.63)等号右边那样由一些项之和来确定。

一般形式的特征方程

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

的特征值 λ_i 满足该方程，即

$$\lambda_i^n + a_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \cdots + a_1\lambda_i + a_0 = 0$$

这个式子可改写为

$$\lambda_i^n = -(a_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \cdots + a_1\lambda_i + a_0) \tag{1.66}$$

从而可以把一个 λ_i 的幂级数简化成这样的形式：

$$f(\lambda_i) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \lambda_i^k \tag{1.67}$$

上述结果表明，在式(1.65)和(1.67)所表示的关系式中，λ_i 和 A

可以互换。能这样做的意义在于，式(1.67)中系数 b_k 比较容易确定，于是可用直接置换的方法将 $f(\lambda_i)$ 转换成式(1.65)中的 $f(\boldsymbol{A})$，而不必从式(1.65)直接确定 b_k.

由于矩阵指数可以写成

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k t^k}{k!} \tag{1.68}$$

由式(1.64)和(1.65)得

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \boldsymbol{A}^k \tag{1.69}$$

式中，b_k 将是时变系数. 由式(1.67)得

$$e^{\lambda_i t} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \lambda_i^k \tag{1.70}$$

将特征值代入式(1.70)即可确定 b_k.

图1.8和式(1.38)的

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

所表示的系统，其特征方程为

$$s^2 + 3s + 2 = 0$$

解该式可得 $\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = -2$. 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 2×2 阶的，式(1.70)具有这样的形式：

$$e^{\lambda_i t} = b_0 + b_1 \lambda_i \tag{1.71}$$

将特征值代入，可得到下列关系式.

$$e^{-t} = b_0 - b_1; \quad e^{-2t} = b_0 - 2b_1 \tag{1.72}$$

解出 b_0 和 b_1，得

$$b_0 = 2e^{-t} - e^{-2t}; \quad b_1 = e^{-t} - e^{-2t} \tag{1.73}$$

于是

$$e^{\boldsymbol{A}t} = b_0\boldsymbol{I} + b_1\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} (2e^{-t} - e^{-2t}) & 0 \\ 0 & (2e^{-t} - e^{-2t}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (e^{-t} - e^{-2t}) \\ (-2e^{-t} + 2e^{-2t}) & (-3e^{-t} + 3e^{-2t}) \end{bmatrix} \tag{1.74a}$$

$$= \begin{bmatrix} (2e^{-t} - e^{-2t}) & (e^{-t} - e^{-2t}) \\ (-2e^{-t} + 2e^{-2t}) & (-e^{-t} + 2e^{-2t}) \end{bmatrix} \tag{1.74b}$$

这也就是用拉普拉斯反变换法在式(1.41 b)中求得的结果。由于 $t = 0$ 时，$e^{At} = I$(由式(1.52)得)，于是在式(1.74a)中应有

$$b_0(0) = 1, \quad b_{1,2,\ldots}(0) = 0$$

这是检查计算是否有错误的一种有效的方法。这种计算的方法也适用于特征值为复数或重特征值的情况(参阅习题 2.7 和 2.15)。

矩阵满足它本身的特征方程这一事实也可以用于求逆阵。式(1.59)为

$$\boldsymbol{A}^2 + 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$$

用 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 乘之得

$$2\boldsymbol{A}^{-1} = -3\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} \tag{1.75}$$

或

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -3/2 & 0 \\ 0 & -3/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & -3/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.76}$$

直接计算 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可以验证这个结果。

本章简述了系统的矩阵描述的各个方面。开头，用方块图研究系统，并针对每一个变量或状态列写各自的微分方程，矩阵的描述就自然而然地引出来了。Takahashi 等人(1970)给出了包括分布参数系统在内的其它很多例子。对于二维或三维系统，矩阵描述可以赋予几何解释，这就使得对系统的行为有一个非常有益的直观理解。方块图的方法还在一阶微分方程和向量微分方程之间建立起对应的关系，这不仅在一般结构形式方面，而且在例如应用拉普拉斯变换的运算方面也是这样。

参 考 文 献

状态变量导论

Chen Chih-Fan, and Haas, I. J., *Elements of Control Systems Analysis* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1968).

Chen, C. T., *Analysis and Synthesis of Linear Control Systems* (Holt, Rinehart and Winston, New York, 1975).
Dorf, R. C., *Time-domain Analysis and Design of Control Systems* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965).
Elgerd, O. I., *Control System Theory* (McGraw-Hill, New York, 1967).
Gabel, R. A., and Roberts, R. A., *Signals and Linear Systems* (Wiley, New York, 1973).
Kuo, B. C., *Automatic Control Systems*, 3rd ed. (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1975).
Takahashi, Y., Robins, M. J., and Auslander, D. M., *Control and Dynamic Systems* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1970).

矩阵代数

Fletcher, T. J., *Linear Algebra* (Van Nostrand Reinhold, 1972).
Hadley, G., *Linear Algebra* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1961).
Hohn, F. E., *Elementary Matrix Algebra* (Macmillan, New York, 1973).

习　题

1.1　一个系统有特征值(极点)

$$\lambda_{1,2,3} = -1,\ -3,\ -4$$

试确定特征方程和相应的伺伴形矩阵 $\boldsymbol{A}$。

$$\left(s^3 + 8s^2 + 19s + 12 = 0;\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -19 & -8 \end{bmatrix}\right)$$

1.2　对于由

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u$$
$$y = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

描述的系统有

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -6 & -11 & -7 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{c}^T = [1\ 0\ 1]$$

画出对应的方块图。由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 求出特征方程并确定特征值。

$$(s^3 + 9s^2 + 26s + 24 = 0;\ \lambda_{1,2,3} = -2,\ -3,\ -4)$$

1.3　证明系统

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

具有同样的特征值并且确定这些特征值。画出每个系统的方块图。对于 A_2，假定断开反馈通道 $a_{31}(=-6)$，画出根轨迹图以便核对闭环特征值。

$$(\lambda_{1,2,3}=-1,-2,-3)$$

1.4 设系统有

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -5 & -2\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

若需要保持其状态在 $x_1=x_2=1$，试确定 u_1 和 u_2 所需的数值。

画出系统的方块图，并在方块图中验证结果的正确性。

$$(u_1=-15;\ u_2=7)$$

1.5(a) 对于系统

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}$$

沿着直线 $x_2=2$，在 $-2<x_1<2$ 之间，每隔 1/2 用向量表示 $\dot{x}$。有满足 $\dot{x}=kx$，即使得 $\dot{x}$ 和 x 共线的 x 值吗？这些方向（**特征向量**，参阅第二章和图 2.11）在状态变量分析中十分重要。

(b) 对于系统

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

沿着 $x_2=1$，$-2<x_1<2$，重复上述过程。

(c) 对于

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}$$

沿着单位圆每隔 45° 画出 $\dot{x}$ 的图。分析沿着任意径向线上的 $\dot{x}$，从而确定系统轨迹的一般形式。

$$\left((a)\ \frac{x_2}{x_1}=\pm 2;\ (b)\ \frac{x_2}{x_1}=\pm 1;\ (c)\ \text{指数螺线}\right)$$

1.6 对于

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}$$

展开

$$x(t)=[sI-A]^{-1}x(0)$$

它的特征值是什么？从上面的展开式，证实某些初始条件将使一个特征值消失。将这些初始条件与习题 1.5a 中 $\dot{x}=kx$ 的方向进行比较。

$$\left(\begin{aligned}\lambda = -1,\ 3;\ \frac{x_2(0)}{x_1(0)} &= 2,\ \lambda = -1 \text{ 消失}\\ \frac{x_2(0)}{x_1(0)} &= -2,\ \lambda = 3 \text{ 消失}\end{aligned}\right)$$

1.7 对于习题 1.5(a) 的系统，用把 $\boldsymbol{x}(s) = [s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{x}(0)$ 反变换到时间域的方法，求出转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$。

$$\left(\begin{bmatrix}(e^{-t} + e^{3t})/2 & (-e^{-t} + e^{3t})/4\\(-e^{-t} + e^{3t}) & (e^{-t} + e^{3t})/2\end{bmatrix}\right)$$

1.8 对于习题 1.5 (a)，用凯莱-哈密尔顿定理求出 $\boldsymbol{\Phi}(t)$，验证习题 1.7 的结果。

1.9 对于

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-6 & -11 & -6\end{bmatrix}$$

用凯莱-哈密尔顿定理求出下式的 b_0、b_1 和 b_2。

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I}b_0 + \boldsymbol{A}b_1 + \boldsymbol{A}^2 b_2$$

试由 $[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}$ 得到 $\phi_{11}(s)$，$\phi_{22}(s)$，$\phi_{33}(s)$ 诸元素，并将其反变换得到 $\phi_{11}(t)$，$\phi_{22}(t)$，$\phi_{33}(t)$。验证这些元素是否和由凯莱-哈密尔顿定理得到 $\phi(t)$ 的元素一致。

$$\left(\begin{aligned}&b_0 = 3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t};\ b_1 = (5e^{-t} - 8e^{-2t} + 3e^{-3t})/2\\&b_2 = (e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t})/2;\ \phi_{11}(t) = 3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t};\\&\phi_{22}(t) = -2.5e^{-t} + 8e^{-2t} - 4.5e^{-3t};\ \phi_{33}(t) = 0.5e^{-t} - 4e^{-2t} + 4.5e^{-3t}\end{aligned}\right)$$

第二章　特征值,特征向量和轨迹

上一章主要从纯分析的角度介绍了状态空间方法的概貌. 本来在分析的基础上可以进一步讨论这一方法，但这一章的论述主要是在几何的基础上展开的，它将使基本原理有更清楚的工程解释. 可以把这种论述的许多方面紧密地联系到复频分析和根轨迹法. 这一章引入的重要概念是将系统表示为对角线系统或典型系统(它的各个固有振型是分别产生的),以及特征向量(它控制固有振型在系统中的分布)的应用.

2.1　特征值的根轨迹研究

在根轨迹分析中，系统的极点是使沿任一闭合回路的传递函数值为 1 的那些 s 的数值. 一般情况如图 2.1(a) 所示，图中多回路系统的某一回路已被断开. 如果对于 $s = s_k$，系统的传递函数值等于 1，即如果

$$\begin{aligned} T(s_k) &= 1 \\ p &\rightarrow q \end{aligned} \tag{2.1}$$

那么,在此回路闭合时，s_k 就是一个极点或特征值，而 $e^{s_k t}$ 是相应的固有振型. 因此,固有振型是这样一种信号,对于这种信号回路的传输是 1. 如果所有的振型互不相同(即非二重或多重振型),就有 n 个互不相同的 s_k 值,其中 n 是系统的阶数. 作为一个简单的例子,考虑图 2.1(b) 的系统,这里

$$T(s) = -\frac{a}{s}$$

当 $s = -a$ 时

$$T(-a) = 1$$

因此

$$s=-a \tag{2.2a}$$

是极点或特征值，而

$$e^{-at} \tag{2.2b}$$

是固有振型．如果在 p 端存在固有振型 e^{-at}，那么在 q 端，一般响应将是

$$-a\int e^{-at}dt=e^{-at} \tag{2.3}$$

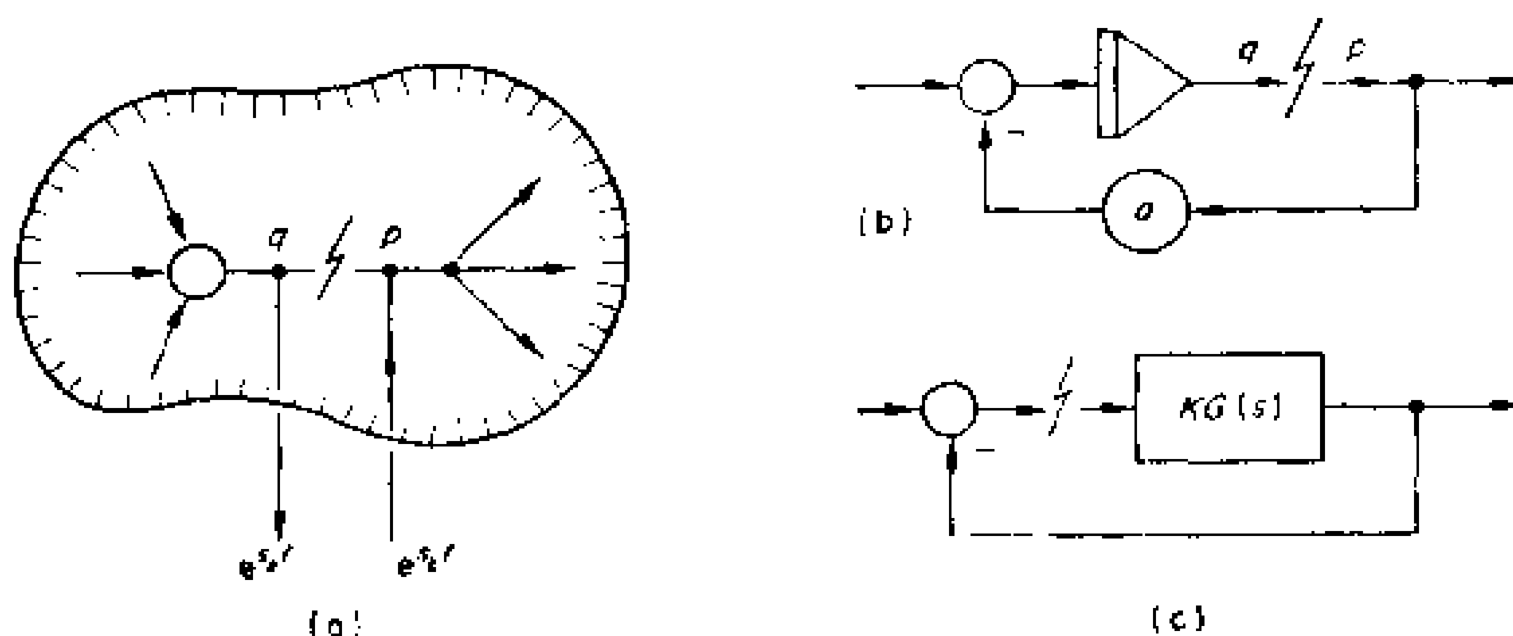


图 2.1 固有振型的确定

这就说明对于固有振型，回路的传输为 1.

无论系统怎样复杂，按上述原则都能导出一般的结果，即出现极点的那些 s 值满足关系

$$T(s)=1 \tag{2.4a}$$

换句话说

$$(T(s)-1)=0 \tag{2.4b}$$

式 (2.4b) 的左边表示回路传递函数和 1 之间的差，称为**回差**．对于固有振型的 s 值，回差是零．用根轨迹法确定这些 s 值时，通常把式 (2.1) 分写成幅值关系式和相角关系式：

$$|T(s)|=1;\ \angle T(s)=0^\circ$$

利用 s 平面上的等幅值曲线和等相位曲线可以得到这些 s 值．一般控制系统有负反馈，如图 2.1(c)，在这种情况下，通常通过解

$$KG(s)=-1,\ \text{或}\ |KG(s)|=1;\ \angle G(s)=180^\circ$$

来确定极点. 因为有负反馈,上式中加入负号,就使总的回路传递函数值为+1.

把这个原理应用于图 2.2 (a) 所示的一般的二阶系统,

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

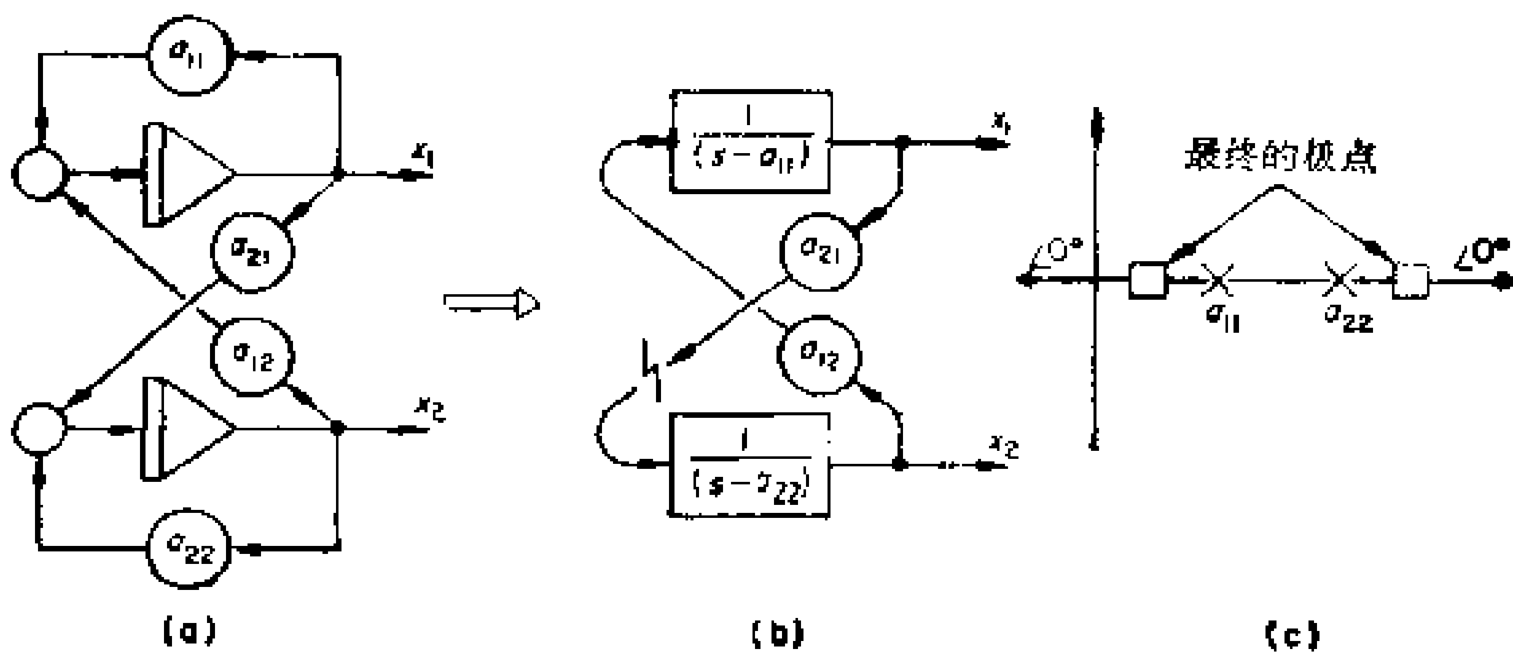


图 2.2 一般二阶系统极点的确定

具有反馈 a_{11} 和 a_{22} 的积分器的传递函数分别为 $1/(s-a_{11})$ 和 $1/(s-a_{22})$,分别在 $s=a_{11}$, a_{22} 处有极点,如图 2.2(b) 所示.通过交叉耦合项 a_{12} 和 a_{21},可构成回路,由此可得闭环系统极点的条件为

$$\frac{a_{12}a_{21}}{(s-a_{11})(s-a_{22})}=1 \tag{2.5}$$

或

$$\frac{1}{(s-a_{11})(s-a_{22})}=\frac{1}{a_{12}a_{21}} \tag{2.6}$$

这些极点都在图象的0°线上,如图 2.2(c) 所示. 可以把极点方程 (2.6) 写成

$$(s-a_{11})(s-a_{22})-a_{12}a_{21}=0 \tag{2.7a}$$

这和用矩阵方法得到的结果(式 (1.36))

$$\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]=(s-a_{11})(s-a_{22})-a_{12}a_{21}=0 \tag{2.7b}$$

是一样的.

从式 (2.1) 所示的一般结果和图 2.2 (c) 的根轨迹来看,可能

会有许多不同的 $\boldsymbol{A}$ 矩阵，它们都具有同样的极点或特征值. 图 2.3(a) 的系统有

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix} \tag{2.8}$$

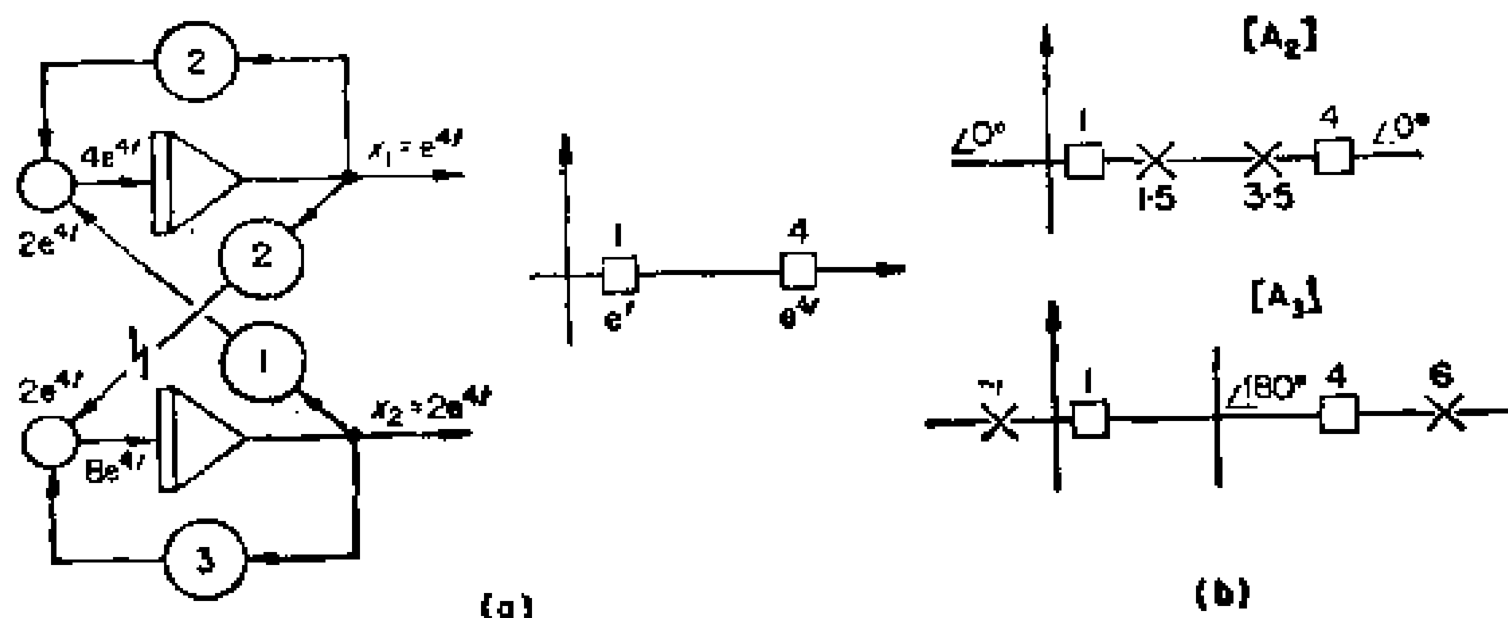


图 2.3 (a) 固有振型有单位回路传输；(b) 具有相同特征值的不同系统

从

$$\frac{1}{(s-2)(s-3)}=\frac{1}{2} \tag{2.9}$$

得到极点 s_1 和 s_2:

$$s_1,\ s_2=1,\ 4 \tag{2.10}$$

这些结果表示系统的固有振型是

$$e^t,\ e^{4t} \tag{2.11}$$

如果把这两个振型中的任一个加到系统中去，则回路的传递函数值为 $+1$. 在图 2.3(a) 中算出了对应于 e^{4t} 的各变量的实际值,图中由 x_1 到 $\dot{x}_2$ 间的连接已断开. 假定在 x_1 处有 e^{4t} 信号，则 $\dot{x}_1=4e^{4t}$. 由于 $a_{11}=2$，为了得到要求的 $\dot{x}_1$ 值,从 x_2 来的信号必须是 $2e^{4t}$. 若 $x_2=2e^{4t}$，则 $\dot{x}_2=8e^{4t}$. 又因 $a_{22}=3$，$a_{21}=2$，那么进入 a_{21} 的信号必须是 e^{4t}，这正是前面所假设的 x_1. 因此,回路的传递函数值为 $+1$. 对于 e^t，回路传递函数值也应是 1，而对其他信号则不然.

对于另外两个具有矩阵

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.5 & 2.5 \\ 0.5 & 3.5 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 6 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

的系统，它们的极点由下式确定：

$$\frac{1}{(s-1.5)(s-3.5)} = \frac{4}{5}; \quad \frac{1}{(s+1)(s-6)} = -\frac{1}{10} \tag{2.13}$$

式(2.12)的 A_2 和 A_3 都具有与式(2.8)的 A_1 同样的极点（见图2.3(b)），不过对于 A_3，因交叉耦合项 $a_{12}a_{21}$ 是负的，其极点应在180°线上．可以验证，同样的固有振型 e^{4t} 和 e^t 也满足 A_2 和 A_3 的系统方块图．显然，在一般情况下可以有无限多的 A 矩阵全都给出如式(2.8)的系统一样的极点．

2.2 对角线系统

设允许系统矩阵的主对角线项 a_{11} 和 a_{22}（即积分器的自反馈项）趋近 s_1 和 s_2，且要求最终的极点仍然保持在 s_1 和 s_2 处，如式(2.10)．取合适的 $a_{12}a_{21}$ 值就能够做到这一点，一个例子是

$$A = \begin{bmatrix} 1.01 & a_{12} \\ a_{21} & 3.99 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

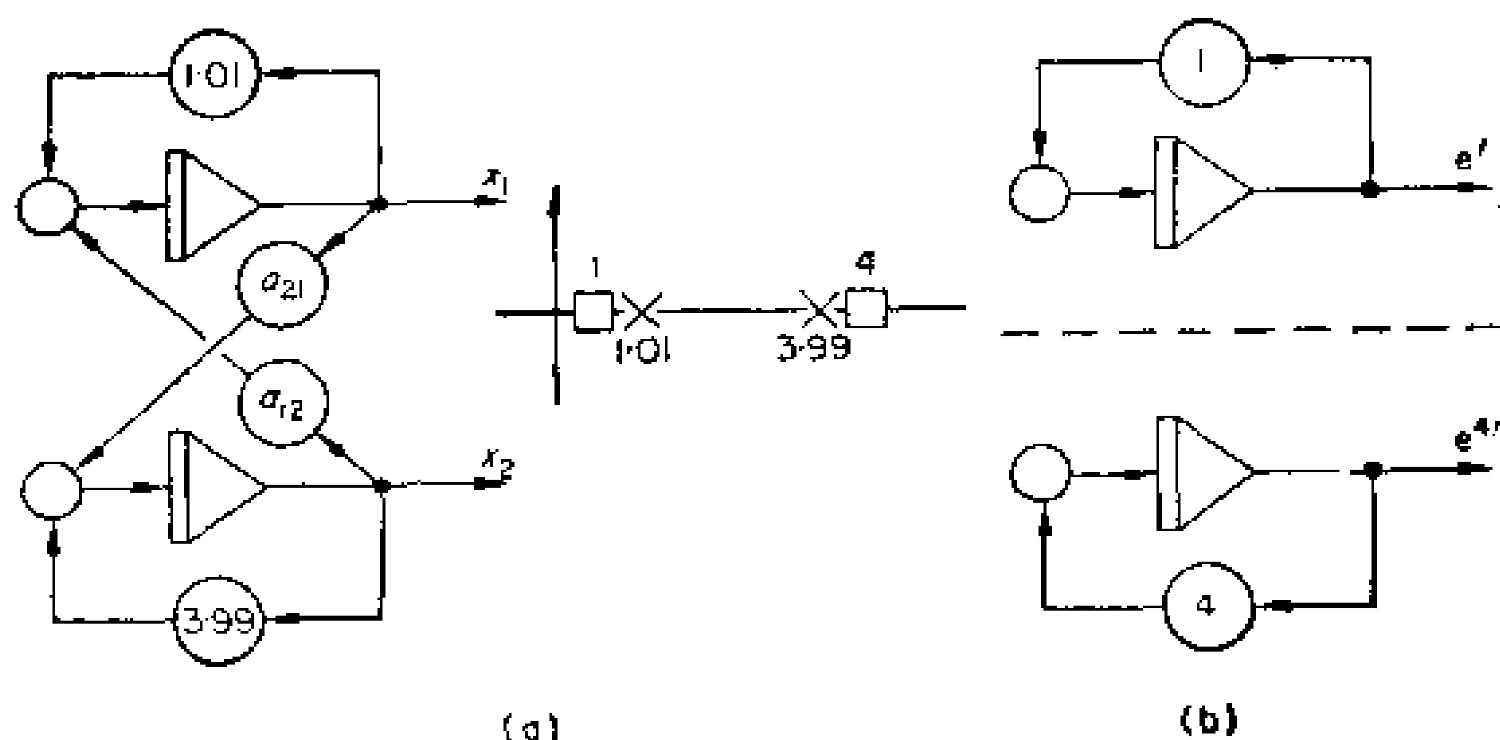


图 2.4 转换为对角线系统

如图 2.4(a) 所示。最终的极点应由

$$\frac{1}{(s-1.01)(s-3.99)}=\frac{1}{a_{12}a_{21}} \tag{2.15}$$

确定．从根轨迹图可见，

$$1/a_{12}a_{21}\approx 33 \text{ 或 } a_{12}a_{21}\approx 0.03 \tag{2.16}$$

这要求交叉耦合项变得非常小．若最终使

$$a_{11}\to s_1,\quad a_{22}\to s_2$$

则必需

$$a_{12}a_{21}\to 0$$

系统变成由两个去耦的自反馈积分器构成，如图 2.4 (b)，而系统矩阵变成以主对角线元素为特征值的对角矩阵．

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix} \tag{2.17}$$

对于任一个没有二重(多重)极点或特征值的系统，都有一个相应的**对角线**系统或**典型**系统，该系统由去耦的积分器组成，每一个积分器都以一个**特征值**作为自反馈项．一般说来，特征值可以是实数或复数．可以把对角线系统或典型系统表示成状态向量的形式，如

$$\begin{bmatrix}\dot d_1\\ \vdots\\ \dot d_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_n\end{bmatrix} \text{或 } \dot{\boldsymbol{d}}=\boldsymbol{\Lambda d} \tag{2.18}$$

其中，积分器的输出为状态 $d_1, \cdots, d_n$．对角线系统 (2.18) 的一个非常重要的性质是每一个积分器的输出是各自的固有振型，而且这些振型可以单独产生．因此，积分器 k 的初始条件将仅产生 $e^{\lambda_k t}$．类似地，各自的固有振型都能由加在相应输入端的外加信号产生．在状态变量分析中，典型系统具有重大的意义，而一般系统和相应的典型系统之间的关系是非常重要的．

取典型系统状态变量式 (2.18) 的拉普拉斯变换，可得

$$s\boldsymbol{d}(s)-\boldsymbol{d}(0)=\boldsymbol{\Lambda d}(s)$$

或

$$\boldsymbol{d}(s) = [s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Lambda}]^{-1}\boldsymbol{d}(0) \tag{2.19}$$

如果详细地展开 $[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Lambda}]^{-1}$，比方说对一个三阶系统，就可得到

$$\frac{1}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)} \times \begin{bmatrix} (s-\lambda_2)(s-\lambda_3) & 0 & 0 \\ 0 & (s-\lambda_1)(s-\lambda_3) & 0 \\ 0 & 0 & (s-\lambda_1)(s-\lambda_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-\lambda_1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s-\lambda_2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s-\lambda_3)} \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

于是有

$$\begin{bmatrix} d_1(s) \\ d_2(s) \\ d_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-\lambda_1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s-\lambda_2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s-\lambda_3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1(0) \\ d_2(0) \\ d_3(0) \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

将上式反变换得到

$$\boldsymbol{d}(t) = e^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{d}(0) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \boldsymbol{d}(0) \tag{2.22}$$

这从形式上表明，每一个状态的确是由单一的固有振型组成的.

由于 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的形式特别简单，所以用相应的典型系统进行系统的设计和研究就有许多优点. 例如，由式 (2.21) 到 (2.22) 的反变换是非常简单的，而 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的乘幂也容易计算，只需将主对角线项自乘到相应幂次就行了. 对于 2×2 的 $\boldsymbol{\Lambda}$ 矩阵

$$\boldsymbol{\Lambda}^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

同样

$$(e^{\Lambda t})^2 = e^{2\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{2\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{2\lambda_2 t} \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

三 角 形 系 统

因为对角线系统中每个积分器只有单一的反馈回路跨接而无其他的相互连接，因此特征值一看便知，这就显示出对角线系统的简单性. 任一个非对角线项表示各积分器之间的相互连接，而许多这样的项通常在系统中（正如在 $\boldsymbol{A}$ 矩阵中）将产生其他的反馈回路并改变其特征值. 然而，如果所有的非对角线项具有式(2.25)的一般形式，即或者都在对角线上部，或者都在下部，则矩阵是**上三角形矩阵或下三角形矩阵**，记作 $\boldsymbol{T}_u$ 或 $\boldsymbol{T}_l$.

$$\boldsymbol{T}_u = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ 0 & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{T}_l = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

在 $\boldsymbol{T}_u$ 中的非对角线项表示积分器之间仅有前向通道联接（如图2.5），而在 $\boldsymbol{T}_l$ 中，则仅有反馈通道联接. 这两种情况都没有构成闭合的附加回路，因此特征值仍然取决于主对角线项. 这样，如果通过某种演算可以将系统矩阵化成上三角形矩阵或下三角形矩阵，其特征值也就一目了然了.

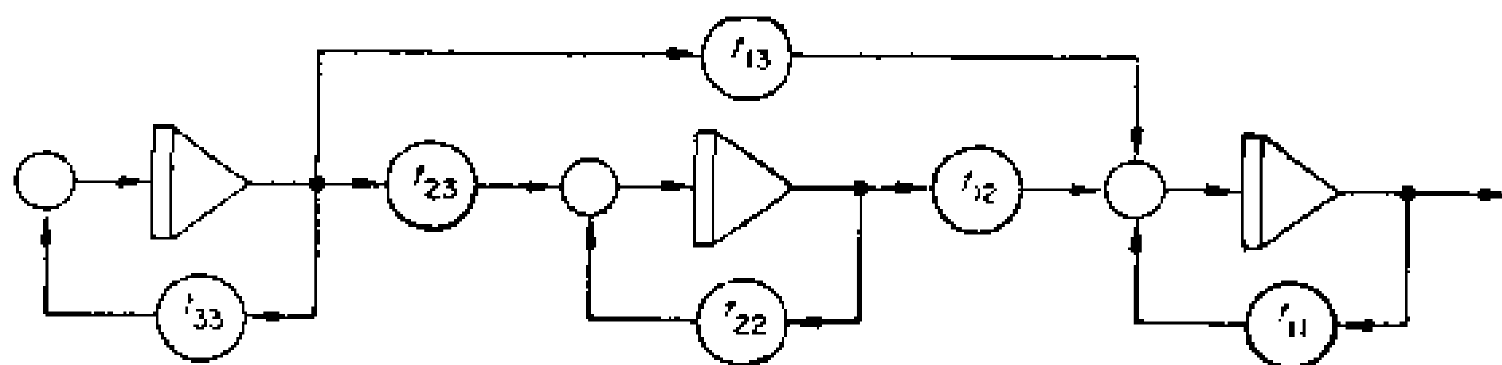


图 2.5　具有上三角形矩阵的系统

这时，虽然在相应的积分器上加上一个初始条件能产生各自的固

有振型，但附加的相互联接通常也会在系统中产生其他的振型.

2.3 特征向量

状态向量方程的拉普拉斯变换为

$$\boldsymbol{x}(s)=[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{x}(0)$$

对于系统

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

前面已得到 $\boldsymbol{x}(s)$ 的部分分式展开式(见式(1.41a)).

$$\begin{bmatrix}x_1(s)\\ x_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(\dfrac{2}{(s+1)}-\dfrac{1}{(s+2)}\right) & \left(\dfrac{1}{(s+1)}-\dfrac{1}{(s+2)}\right)\\ \left(\dfrac{-2}{(s+1)}+\dfrac{2}{(s+2)}\right) & \left(\dfrac{-1}{(s+1)}+\dfrac{2}{(s+2)}\right)\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}\tag{2.26}$$

把各个极点分开来写，可将这个关系式重新整理为

$$\begin{bmatrix}x_1(s)\\ x_2(s)\end{bmatrix}=\frac{1}{(s+1)}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}+\frac{1}{(s+2)}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}\tag{2.27}$$

取它的反变换，得到

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=e^{-t}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}+e^{-2t}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}\tag{2.28}$$

或

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=e^{-t}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\{2x_1(0)+x_2(0)\}+e^{-2t}\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}\{-x_1(0)-x_2(0)\}\tag{2.29}$$

式(2.29)表明:

e^{-t} 项在 x_1, x_2 处的比值是 1，-1.

e^{-2t} 项在 x_1, x_2 处的比值是 1，-2.

而且这些比值与 $x_1(0)$ 和 $x_2(0)$ 无关. 实际上，这一结论对于具有各不相同的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 的系统通常也是正确的，而可以把状态向量表示为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = e^{\lambda_1 t}\begin{bmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{bmatrix}\{f_1\} + e^{\lambda_2 t}\begin{bmatrix} w_{12} \\ \vdots \\ w_{n2} \end{bmatrix}\{f_2\} + \cdots + e^{\lambda_n t}\begin{bmatrix} w_{1n} \\ \vdots \\ w_{nn} \end{bmatrix}\{f_n\} \tag{2.30a}$$

$$= e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{w}_1\{f_1\} + e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{w}_2\{f_2\} + \cdots + e^{\lambda_n t}\boldsymbol{w}_n\{f_n\} \tag{2.30b}$$

其中，$\{f_1\}, \cdots, \{f_n\}$ 是由初始条件构成的激励项，$\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n$ 是向量，它们的分量给出固有振型在各个状态 $x_1, \cdots, x_n$ 上的分布. 这些向量称为**特征向量**，在状态变量分析中，它是极其重要的. 必须强调指出，固有振型的分布完全取决于有关的特征向量而和激励无关，激励仅仅影响它的大小. 因此，不管某个固有振型是如何被激发起来的，它在各个状态中出现的幅值相对量总是恒定的.

既然在对角线系统的各个输出处可以分别得到各个振型的信号（见式(2.22)或图 2.4(b)），那么系统的状态向量 $\boldsymbol{x}$ 和它的对角线系统的输出向量 $\boldsymbol{d}$ 之间就有如下的关系.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{d} \tag{2.31}$$

其中，$\boldsymbol{W}$ 是以特征向量作为列的矩阵. 上述关系可以用图 2.6 表示，其中 $\boldsymbol{W}$ 是转换矩阵，它把对角线系统的向量 $\boldsymbol{d}$ 转换成系统的状态向量 $\boldsymbol{x}$. 对于前面已用来求得式(2.29)的系统，特征向量矩阵是

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

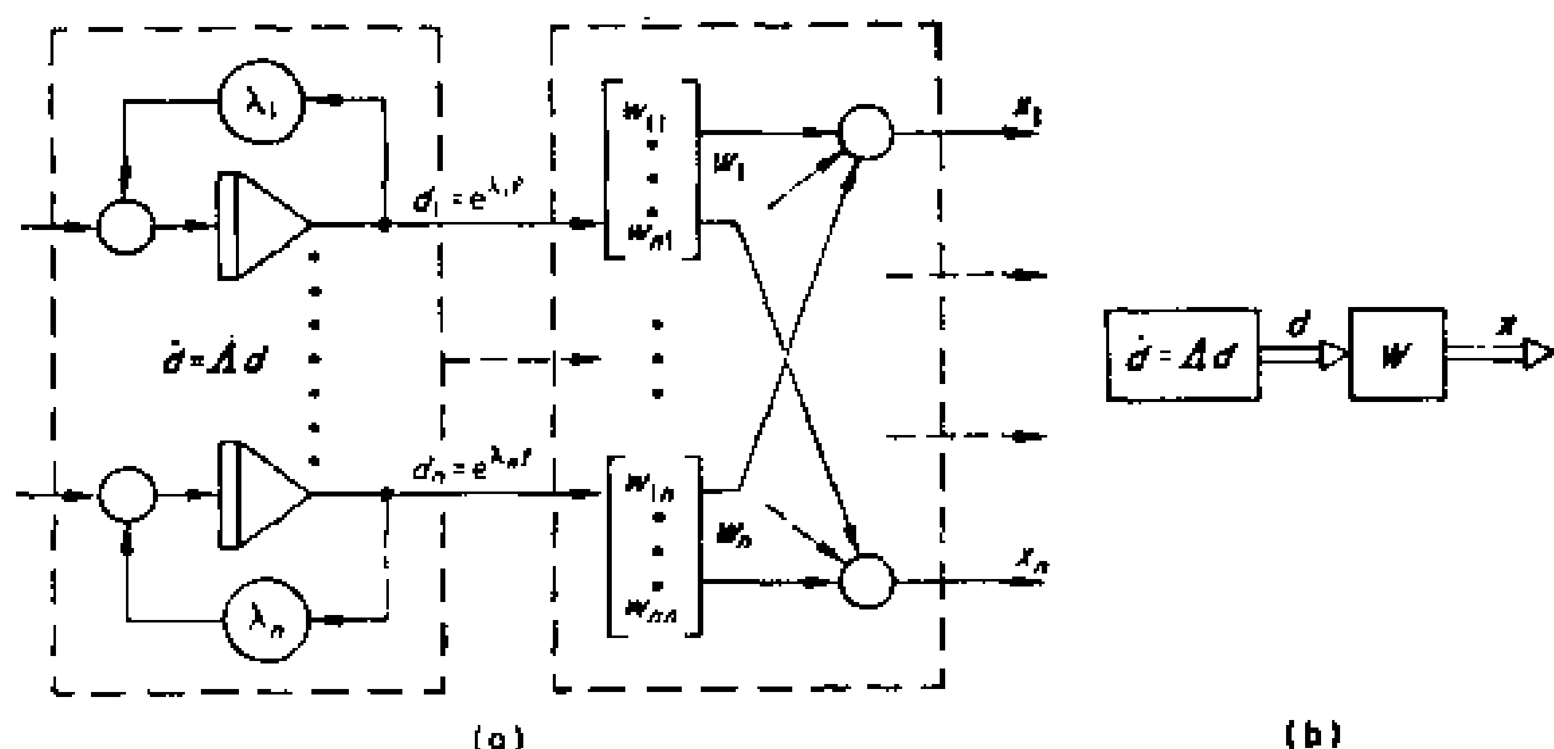


图 2.6 对角线系统和特征向量矩阵

因为

$$x = Wd$$

是从对角线系统到实际系统的转换，那么反之，

$$d = W^{-1}x \tag{2.33}$$

就是从实际系统到对角线系统的相应转换. 因而，例如初始条件就可由下面关系式进行转换.

$$d(0) = W^{-1}x(0) \tag{2.34}$$

对于式(2.32)的特征向量矩阵，有

$$\begin{bmatrix} d_1(0) \\ d_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

整个系统如图 2.7 (a) 所示，其中对角线系统的每一个振型发生器的初始条件是实际系统初始条件的一个组合. 假设初始条件是

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

建议读者按此条件参照图 2.7(a) 详细推导出式(2.29)的结果，即

$$x_1(t) = e^{-t}\{2x_1(0) + x_2(0)\} - e^{-2t}\{x_1(0) + x_2(0)\}$$
$$x_2(t) = e^{-t}\{-2x_1(0) - x_2(0)\} + e^{-2t}\{2x_1(0) + 2x_2(0)\}$$

外激励 Bu 也要通过 W^{-1} 来转换，结果为

$$\dot d = \Lambda d + W^{-1}Bu \tag{2.37}$$

一般系统的方块图如图 2.7 (b) 所示. 图 2.7 (b), (c) 的虚线框的外特性是一样的.

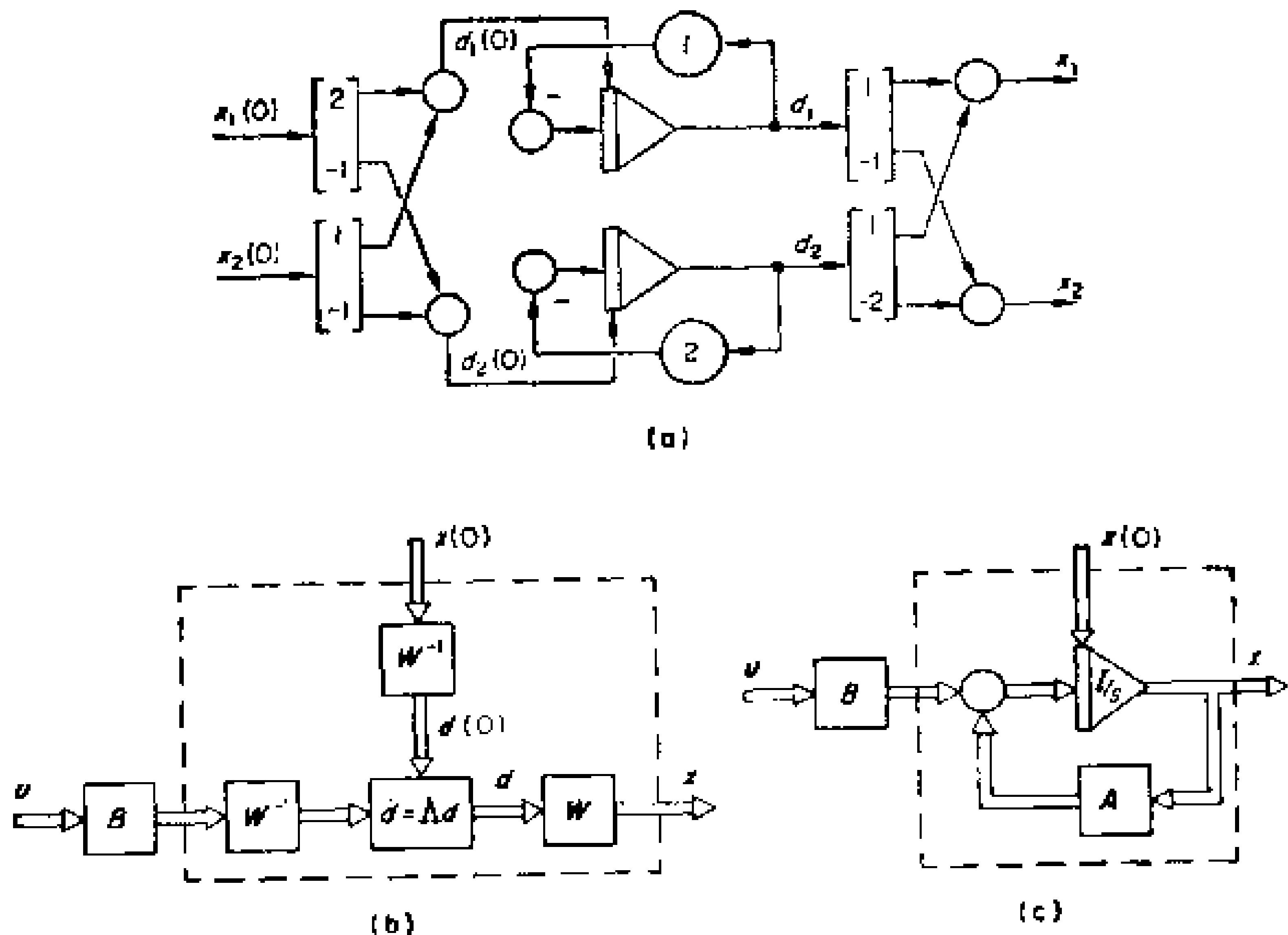


图 2.7　系统方块图: (a) 对角线系统的初始条件;
(b), (c) 不同的方块图表示

从式 (2.34) 和 (2.37) 可见,在对角线系统中初始条件和外激励输入对各个振型发生器的影响都决定于 $\boldsymbol{W}^{-1}$ 矩阵的行. 由于

$$\begin{bmatrix} d_1(0) \\ \vdots \\ d_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

其中, $\boldsymbol{r}_1^T, \cdots, \boldsymbol{r}_n^T$ 是 $\boldsymbol{W}^{-1}$ 矩阵的行,因此可把一般表达式 (2.30a) 写成

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{r}_1^T \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} + \cdots + e^{\lambda_n t}\boldsymbol{w}_n\boldsymbol{r}_n^T \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

作为一个具体例子,对图 2.7 (a) 的系统,它的

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix};\quad W=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix};\quad W^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix} \tag{2.40}$$

其状态向量为

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=e^{-t}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}[2\quad 1]\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}$$

$$+e^{-2t}\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}[-1\quad -1]\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix} \tag{2.41}$$

上式与式 (2.29) 相符合.

转换为对角线系统

如前所述 (2.2 节), 用对角线系统来进行系统的设计和研究通常是比较容易的. 因此必须能够从 $\boldsymbol{A}$ 矩阵表达式转换为 $\boldsymbol{\Lambda}$ 矩阵表达式. $\boldsymbol{A}$ 矩阵表达式是

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{2.42}$$

而

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{d} \tag{2.43a}$$

微分得

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{W}\dot{\boldsymbol{d}} \tag{2.43b}$$

把式 (2.43a) 和 (2.43b) 代入式 (2.42) 得

$$\boldsymbol{W}\dot{\boldsymbol{d}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}\boldsymbol{d}$$

或

$$\dot{\boldsymbol{d}}=\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}\boldsymbol{d} \tag{2.44}$$

但

$$\dot{\boldsymbol{d}}=\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{d}$$

因此

$$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{W} \tag{2.45a}$$

上式左乘 $\boldsymbol{W}$ 和右乘 $\boldsymbol{W}^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{W}^{-1} \tag{2.45b}$$

用式 (2.45a) 和 (2.45b) 就能够实现从实际系统到对角线系统的转换, 以及相反的转换. 下面将可以看出, 特征向量矩阵是这

种转换的主要特征.

对于图 2.7 (a) 的系统，有

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix};\quad W=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix};\quad W^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

由此得到

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix} \tag{2.46}$$

这就验证了式 (2.45a). 事实上，对数字简单的情况，作为验证特征向量矩阵及其逆阵是否算对，式 (2.45a) 和 (2.45b) 是有用的.

考虑式 (2.45b) 可见，对于任何一个 $\boldsymbol{\Lambda}$，亦即对于任何给定的固有振型(对于现在的讨论，是指数值不同的实数振型)，原则上可以任意地规定具有实数分量的特征向量矩阵 $\boldsymbol{W}_1$，然后求逆给出 $\boldsymbol{W}_1^{-1}$，这样由

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{W}_1^{-1} \tag{2.47}$$

就能够得到相应的系统 $\boldsymbol{A}_1$. 因此 $\boldsymbol{A}_1$ 是具有由 $\boldsymbol{\Lambda}$ 确定其固有振型的系统. 当然，$\boldsymbol{W}_1$ 必须是非奇异的 ($\det\boldsymbol{W}_1\neq 0$)，以使 $\boldsymbol{W}_1^{-1}$ 存在. 给定第二个任意的特征向量矩阵 $\boldsymbol{W}_2$，可得到另一个系统

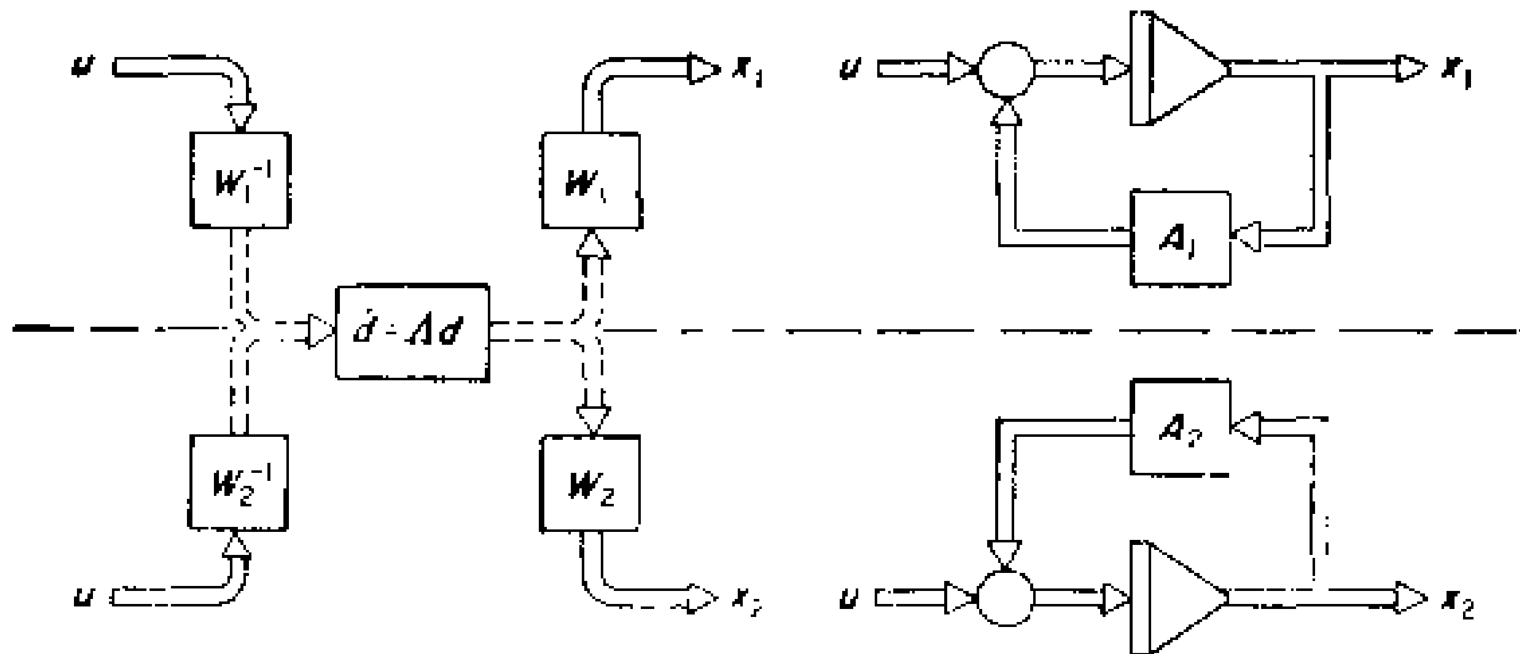


图 2.8 相似系统

$$\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{W}_2^{-1} \tag{2.48}$$

通常，可以得到无限多个系统，它们都有相同的特征值但有不同的 $\boldsymbol{A}$ 矩阵. 这种情况可用图 2.8 表示. 式(2.8)和式 (2.12) 的三个系

统都有

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

但都有不同的特征向量矩阵，因此 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 称为**相似的**.

相 似 转 换

因为式(2.47)和(2.48)两者都相应于同一对角线系统，通过

$$\Lambda = \boldsymbol{W}_1^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{W}_1 = \boldsymbol{W}_2^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{W}_2 \tag{2.49}$$

可以得到 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 之间的直接关系.

$$\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{W}_1^{-1}\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{W}_1^{-1} \tag{2.50}$$

或

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{V} \tag{2.51}$$

其中

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W}_2\boldsymbol{W}_1^{-1} \tag{2.52}$$

以式(2.51)的关系相联系的任意两个矩阵都有同样的特征值，因为可以认为 $\boldsymbol{V}$ 是由特征向量矩阵推导出来的，如式(2.50). 然而，对于给定的 $\boldsymbol{V}$，矩阵 $\boldsymbol{W}_2$ 和 $\boldsymbol{W}_1^{-1}$ 不是唯一的，因为矩阵的因子分解不是唯一的. 另一方面，式(2.50)可以表示成

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{W}_2^{-1} = \boldsymbol{W}_1\boldsymbol{W}_2^{-1}\boldsymbol{A}_2 \tag{2.53}$$

或

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{A}_2 \tag{2.54}$$

其中

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{W}_1\boldsymbol{W}_2^{-1} = \boldsymbol{V}^{-1} \tag{2.55}$$

任何一对以式(2.51)和(2.54)的关系形式相联系的矩阵都称为**相似矩阵**，因为它们有同样的特征值，而一般关系

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{V} \text{ 或 } \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{U} \tag{2.56}$$

称为**相似转换**.

相似转换的一个应用是把一个矩阵转换为另一种形式，使它的某些性质能够容易地识别出来. 典型系统转换

$$\Lambda = \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}$$

或

$$W\Lambda = AW$$

是一种特殊的相似转换，它把系统变为对角线形式．举另一个例子，矩阵

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.57}$$

将把图 1.8 的同伴形系统

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

转换成上三角阵 A_u(见 2.2 节和式(2.25))

$$A_u = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

从 A_u 可以明显地看出，系统的特征值是 -1，-2.

从方块图确定特征向量

既然特征向量表明了固有振型在系统各状态间的分布，如果已知固有振型，原则上靠观察方块图，如前面图 2.3 (a) 中那样，从考虑固有振型信号的相对大小，就可以得到特征向量的各分量．对于同伴形系统这种特殊情况（见 1.2 节），各积分器之间是直接相连的，见图 2.9(a).

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \dot{x}_1 \\ x_3 &= \dot{x}_2 \\ &\vdots \\ x_n &= \dot{x}_{n-1} \end{aligned}\right\} \tag{2.59}$$

因此，如果 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是特征值，以及

$$x_1 = e^{\lambda_k t}$$

那么，由简单的微分关系，可以得到

$$x_2 = \lambda_k e^{\lambda_k t}, \quad \cdots, \quad x_n = \lambda_k^{n-1} e^{\lambda_k t} \tag{2.60}$$

并可立即写出特征向量矩阵

$$
W=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.61}
$$

这叫做范德蒙矩阵．上面假设 x_1 处的固有振型幅值为 1．这仅仅是为了方便．事实上，取任意数值都可以，而这不会改变各状态的相对大小，它是特征向量的基本信息．

对于具有特征值 λ_1 和 λ_2 以及

$$
A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}
$$

的一般二阶系统，可以由图 2.9(b) 看出特征向量是

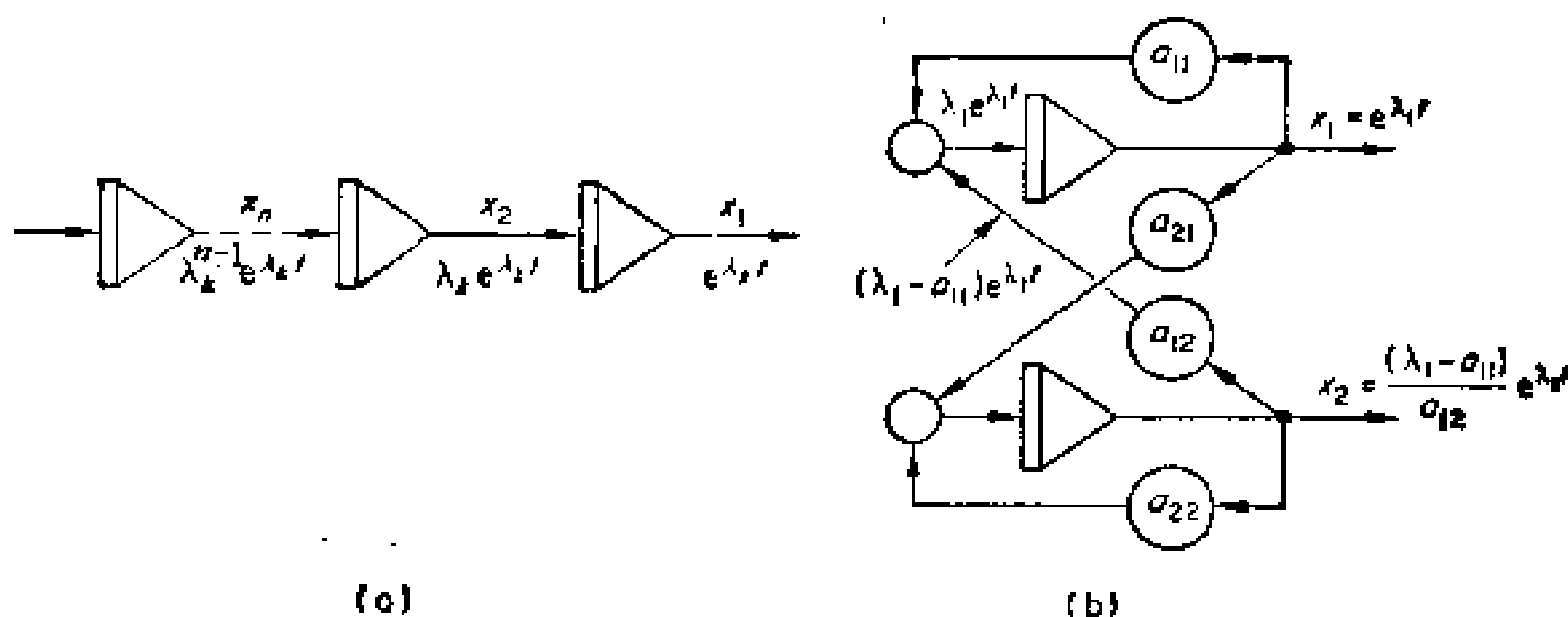


图 2.9　特征向量的确定

$$
W=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \left(\dfrac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}\right) & \left(\dfrac{\lambda_2-a_{11}}{a_{12}}\right) \end{bmatrix} \tag{2.62}
$$

如果系统是同伴形的，则 $a_{11}=0$，$a_{12}=1$，式(2.62)简化为式(2.61)的形式．

可以把这一方法推广到其他情况，但对于更复杂的系统可以用其他的方法确定特征向量．

特征向量矩阵的逆阵作为振型滤波器

特征向量矩阵的逆阵是从实际系统到典型系统的转换矩阵，这可由下式看出，

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{x}$$

这一关系说明一个值得注意的结果：虽然状态向量 $\boldsymbol{x}$ 的分量 $x_1, \cdots, x_n$ 每一个都包含固有振型的不同组合（见式(2.30a)和b)，但乘以特征向量矩阵的逆阵 $\boldsymbol{W}^{-1}$ 就把 $\boldsymbol{x}$ 变为 $\boldsymbol{d}$，而 $\boldsymbol{d}$ 的每一个分量仅由单一的振型组成，这表明 $\boldsymbol{W}^{-1}$ 起着振型滤波器的作用．由于

$$\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{W}=\boldsymbol{I}$$

其展开式为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}[\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_2\cdots\boldsymbol{w}_n]=\begin{bmatrix} 1 & & & \boldsymbol{0} \\ & 1 & & \\ \boldsymbol{0} & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

其中，$\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{W}^{-1}$ 的行，所以每一个乘积是

$$\boldsymbol{r}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_k=\begin{cases} 0 & j\neq k \\ 1 & j=k \end{cases} \tag{2.64}$$

在实际系统中，任一个固有振型 λ_k 的分布都对应于它的特征向量的分量（见图2.10(a)），而式(2.64)的乘积表示将状态变量加起来，其中每一个状态变量都按 $\boldsymbol{W}^{-1}$ 的行 $\boldsymbol{r}_j^{\mathrm{T}}$ 的分量加权．由式(2.64)可见，除具有行 $\boldsymbol{r}_j^{\mathrm{T}}$ 的振型 λ_j 外，其它所有固有振型的分量的总和全是零；因而仅有单一的振型出现．用复频的概念来讲，系统的固有振型是由 s 平面上的极点表示的，并且在 $x_1(s)$，$x_2(s)$，$\cdots$，$x_n(s)$ 之间会有各种传递关系．当这些传递关系以 $\boldsymbol{r}_j^{\mathrm{T}}$ 加权来相加时，总的传输产生若干个零点，它们对消了除 λ_j 外的所有极点．

作为一个例子，考虑具有

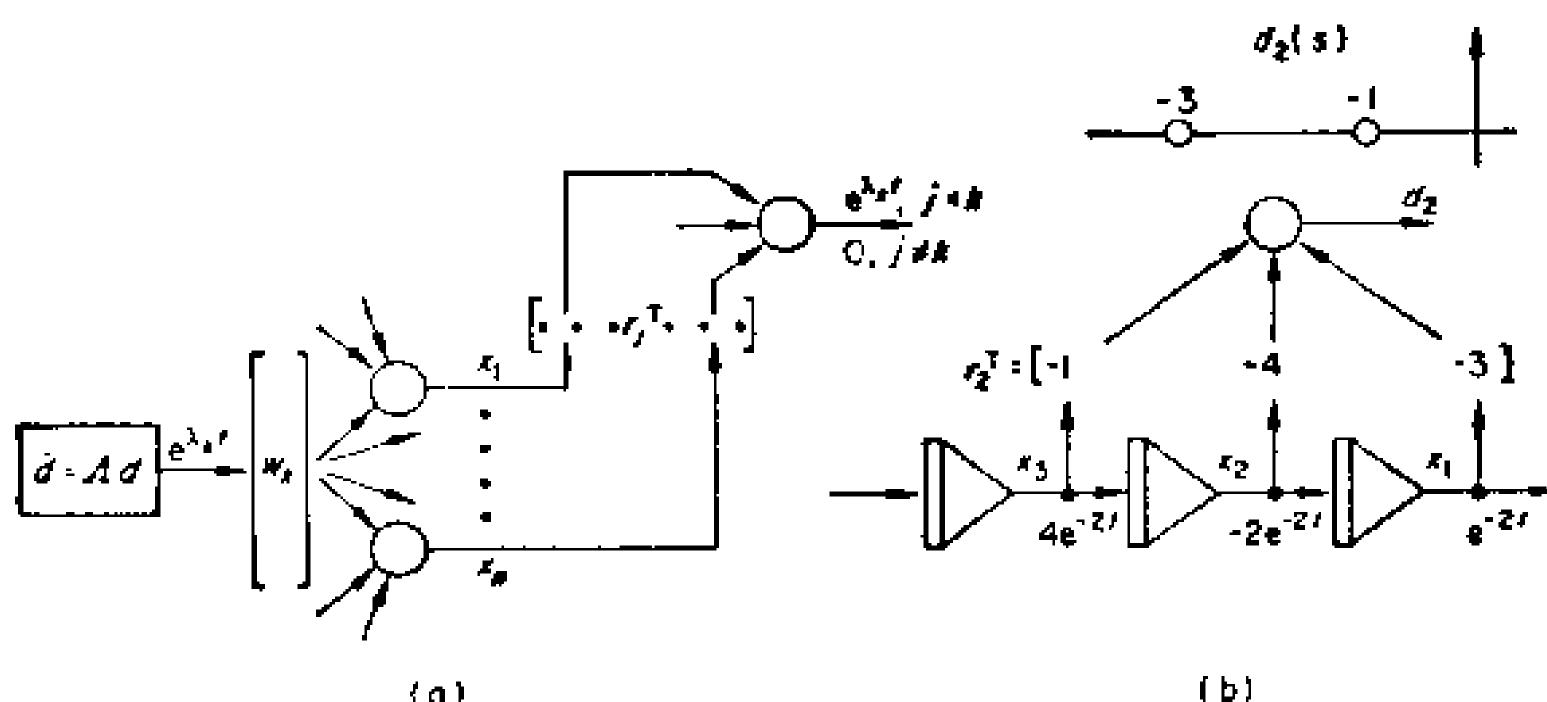


图 2.10　振型的分布：(a) 特征向量矩阵和其逆阵的行；(b) 由此逆阵的行产生的零点

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix} \tag{2.65}$$

的同伴形系统，它有特征值 -1，-2，-3，特征向量矩阵及其逆阵是

$$W=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix};\quad W^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6 & 5 & 1\\ -6 & -8 & -2\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix} \tag{2.66}$$

对于固有振型 e^{-2t}，在各状态处其相对大小的分布如图 2.10 (b) 所示，用 W^{-1} 的 $r_1^T, \cdots, r_3^T$ 加权将它们组合起来，得

$$\left.\begin{aligned} r_1^T:&\ \frac{1}{2}(6-10+4)=0\\ r_2^T:&\ \frac{1}{2}(-6+16-8)=1\\ r_3^T:&\ \frac{1}{2}(2-6+4)=0\end{aligned}\right\} \tag{2.67}$$

说明 e^{2t} 只能在 d_2 处出现，类似地，对于其他的振型，就只能在 d_1 或 d_3 处出现，按复频分析

$$\left.\begin{aligned} x_2(s)&=sx_1(s)\\ x_3(s)&=s^2x_1(s)\end{aligned}\right\} \tag{2.68}$$

得到

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{d}_1(s) &= \frac{1}{2}(s^2+5s+6)x_1(s) = \frac{1}{2}(s+2)(s+3)x_1(s) \\
\boldsymbol{d}_2(s) &= -\frac{1}{2}(2s^2+8s+6)x_1(s) = -(s+1)(s+3)x_1(s) \\
\boldsymbol{d}_3(s) &= \frac{1}{2}(s^2+3s+2)x_1(s) = \frac{1}{2}(s+1)(s+2)x_1(s)
\end{aligned}\right\} \tag{2.69}
$$

$\boldsymbol{d}(s)$ 的每一个分量的传递函数有两个零点，它们消去除了对应的固有振型极点之外的所有极点.

分析法确定特征向量

上面我们介绍特征向量时，说明它是表征固有振型的相对分布的，并且在式(2.26)至(2.29)中，由系统传递函数矩阵的反变换得到特征向量. 然而，在形式上特征向量的概念和矩阵代数法则有更多的联系，在这一段里我们将进行这方面的论述.

可以认为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 把向量 $\boldsymbol{p}$ 转换为另一个向量 $\boldsymbol{q}$，而矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 实现其逆转换，即

$$
\boldsymbol{q} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p} \tag{2.70a}
$$

以及

$$
\boldsymbol{p} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{q} \tag{2.70b}
$$

对于二维情况，这可以用图 2.11 (a) 来表示. 如果移动 $\boldsymbol{p}$，那么 $\boldsymbol{q}$ 也将移动，并得到某种轨迹，如图 2.11 (b) 所示. 事实上，可以把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 看成是一种齿轮箱，它联接表征 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 的小杆，如果移动 $\boldsymbol{p}$ 端或改变其长度，$\boldsymbol{q}$ 端就有相应的变化. 这个原理可以很容易地直接推广到三维系统，而对于更高维系统这也是对的，但不直观.

对于某些特殊的 $\boldsymbol{p}_k$，两个向量可能共线，如图 2.11 (c)，即具有关系

$$
\boldsymbol{q}_k = \lambda_k \boldsymbol{p}_k \tag{2.71a}
$$

或

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_k = \lambda_k \boldsymbol{p}_k \tag{2.71b}
$$

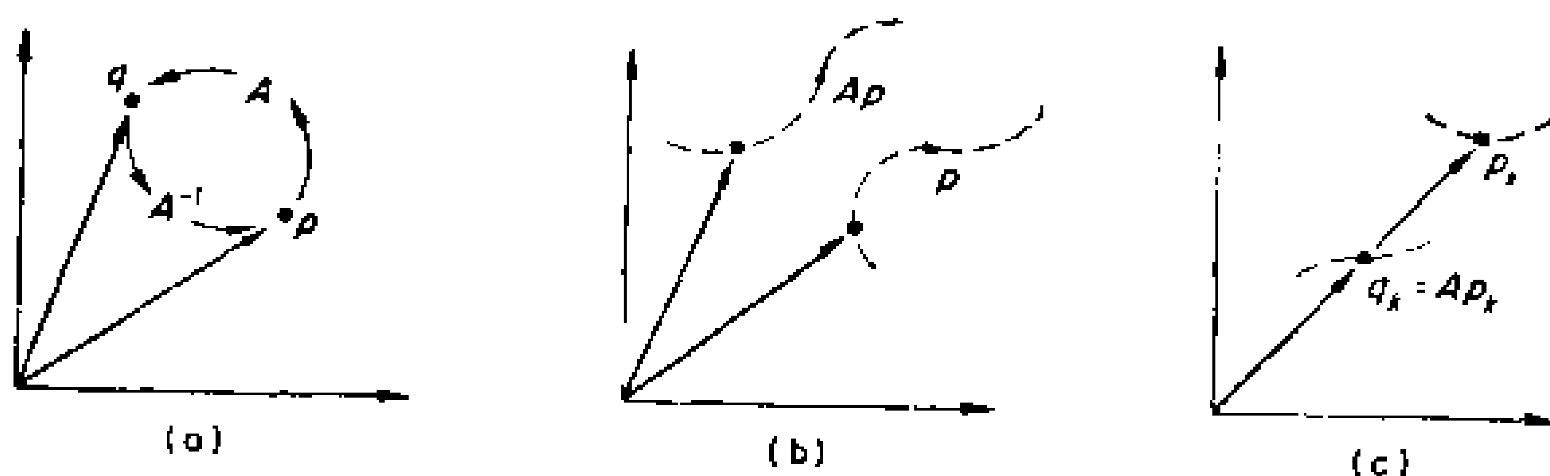


图 2.11 向量变换：(a)，(b) 一般情况；(c) 特征向量情况

其中，λ_k 是常数，对于这一情况

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{p}_k \text{ 是 } \boldsymbol{A} \text{ 的特征向量} \\ \lambda_k \text{ 是相应的特征值} \end{array} \tag{2.72}$$

或按上文采用的关于特征向量的表示法，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}_k = \lambda_k \boldsymbol{w}_k \tag{2.73}$$

式(2.73)可以用来确定特征向量. 特征值为实数时，关系式(2.73)是直观的，特征值为复数时，它也是正确的，但此时不能得到如图 2.11 (c) 的简单几何解释.

对于一般的 2 × 2 系统，按其特征值 λ_1 具体地写出式(2.73)，得到

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{11} \\ w_{21} \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} w_{11} \\ w_{21} \end{bmatrix} \tag{2.74}$$

展开上式得到两个方程

$$a_{11}w_{11} + a_{12}w_{21} = \lambda_1 w_{11} \tag{2.75a}$$

$$a_{21}w_{11} + a_{22}w_{21} = \lambda_1 w_{21} \tag{2.75b}$$

由此可以得到比值

$$w_{21}/w_{11} = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\lambda_1 - a_{22}} \tag{2.76}$$

给出具体数字时，就可以确定 w_{21}/w_{11}。要注意的是，只能得到**比值** w_{21}/w_{11}；这在 $\boldsymbol{x}$ 平面上规定了特征向量的方向，而没有确定其大小. 式(2.76)右边的两个表达式给出同样的比值，其中较左边的式子就是从观察图 2.9b 所得到的（见式(2.62)）. 从式(2.73)

可得到相应于 λ_2 的类似的比值 w_{22}/w_{12}.

作为一个例子，设系统矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & -3\end{bmatrix}$$

它的特征值是 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$. 对于 $\lambda_1=-1$，可把式(2.75)写成

$$w_{21}=-w_{11};\quad -2w_{11}-3w_{21}=-w_{21} \tag{2.77}$$

由上两式都可得到

$$\frac{w_{21}}{w_{11}}=-1 \tag{2.78}$$

类似地，对于 $\lambda_2=-2$，我们有

$$w_{22}=-2w_{12};\quad -2w_{12}-3w_{22}=-2w_{22} \tag{2.79}$$

由上两式都可得到

$$\frac{w_{22}}{w_{12}}=-2 \tag{2.80}$$

最后，令 $w_{11}=w_{12}=1$ 可得到

$$W=\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -2\end{bmatrix} \tag{2.81}$$

这就是式(2.32)得到的结果.

可以容易地用本例对式(2.73)的一般结果作几何学上的验证. 如果 x 取为 $x_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$，它刚好在 $\lambda_1=-1$ 的特征向量的方向上，因此

$$Ax_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=-x_1 \tag{2.82}$$

如图 2.12 所示. 如 x 取为 $x_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，它不是沿着特征向量的方向，因此

$$Ax_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-5\end{bmatrix}\neq-1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \tag{2.83}$$

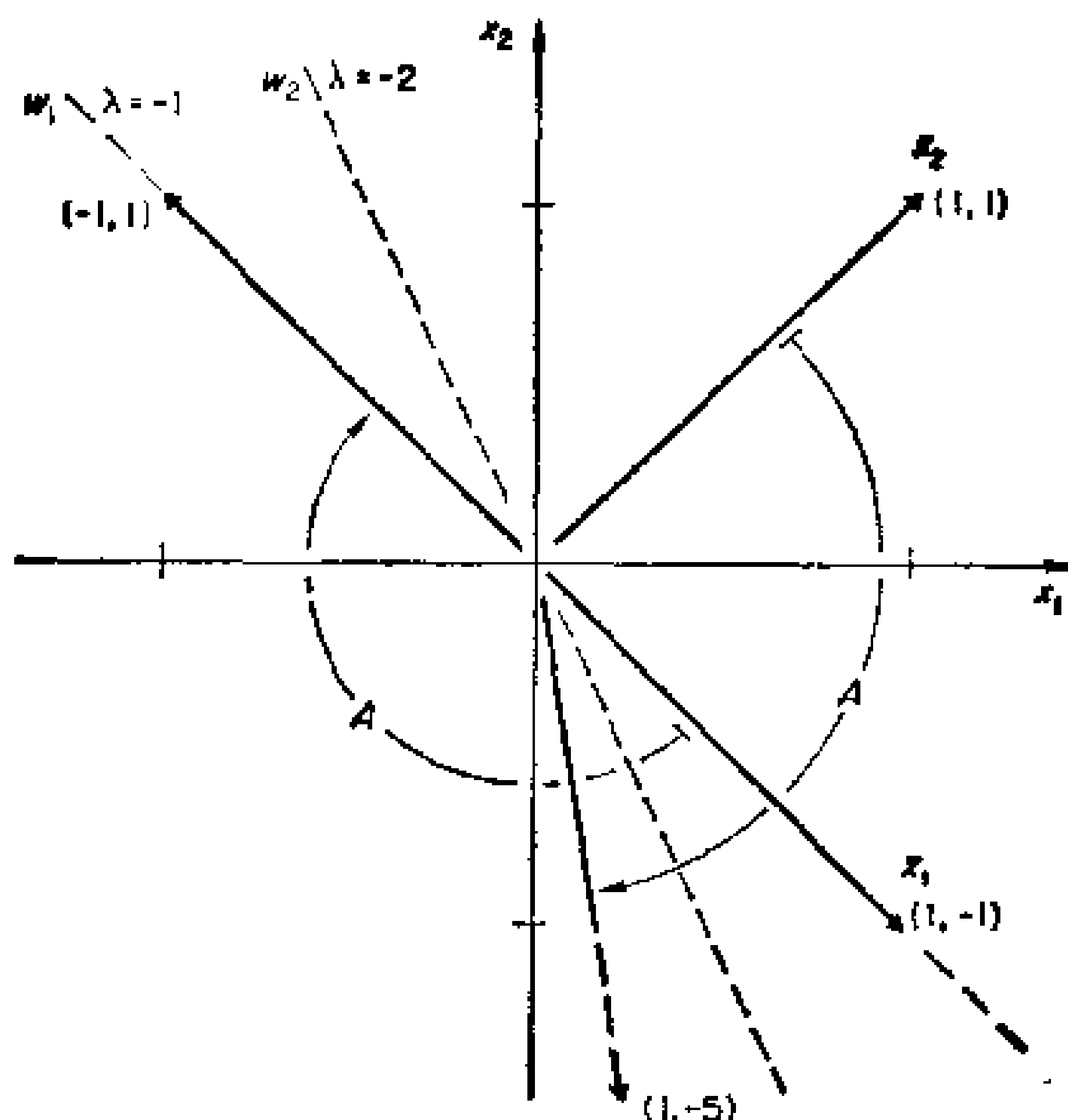


图 2.12　特征向量的转换

2.4　特征向量和轨迹

在前面(1.2 节)已经讨论过把状态向量随时间的变化描述为一条轨迹,我们运用由式(2.72)得到的关于特征向量的几何解释,可以更为深入地讨论这个问题. 用二阶系统来阐述一些基本概念是方便的,所得到的各种原理亦适用于高阶系统.

考察一个二阶系统的对角线形式,它具有互不相同的负实特征值. 可以在 $\boldsymbol{d}$ 平面上描述此对角线系统的状态,如图 2.13 (a) 所示. 对应的实际系统的状态可在 $\boldsymbol{x}$ 平面上描述,如图 2.13 (b) 所示. 如果在对角线系统中只产生一个固有振型 $d_1 = d_1(0)e^{\lambda_1 t}$,则 $\boldsymbol{d}$ 状态将按时间的指数规律沿 d_1 轴运动,如图 2.13 (a) 所示. 在 x_1 和 x_2 将出现这个振型,其相对大小由对应的特征向量的分量所决定.

$$x_1 = w_{11} d_1(0) e^{\lambda_1 t} \tag{2.84a}$$

$$x_2 = w_{21} d_1(0) e^{\lambda_1 t} \tag{2.84b}$$

它在 $\boldsymbol{x}$ 平面上绘出一条直线轨迹，见图 2.13 (b). 类似地，如果只激发第二个固有振型，则状态 $\boldsymbol{d}$ 沿着 d_2 移动，而状态 $\boldsymbol{x}$ 沿着对应于 λ_2 的特征向量移动. 若 λ_1 和 λ_2 都是稳定的，上述两种情况下状态点都将移到原点，而一个不稳定的振型将引起离开原点的运动. 此外，各个特征向量的方向取决于 $\boldsymbol{W}$ 矩阵.

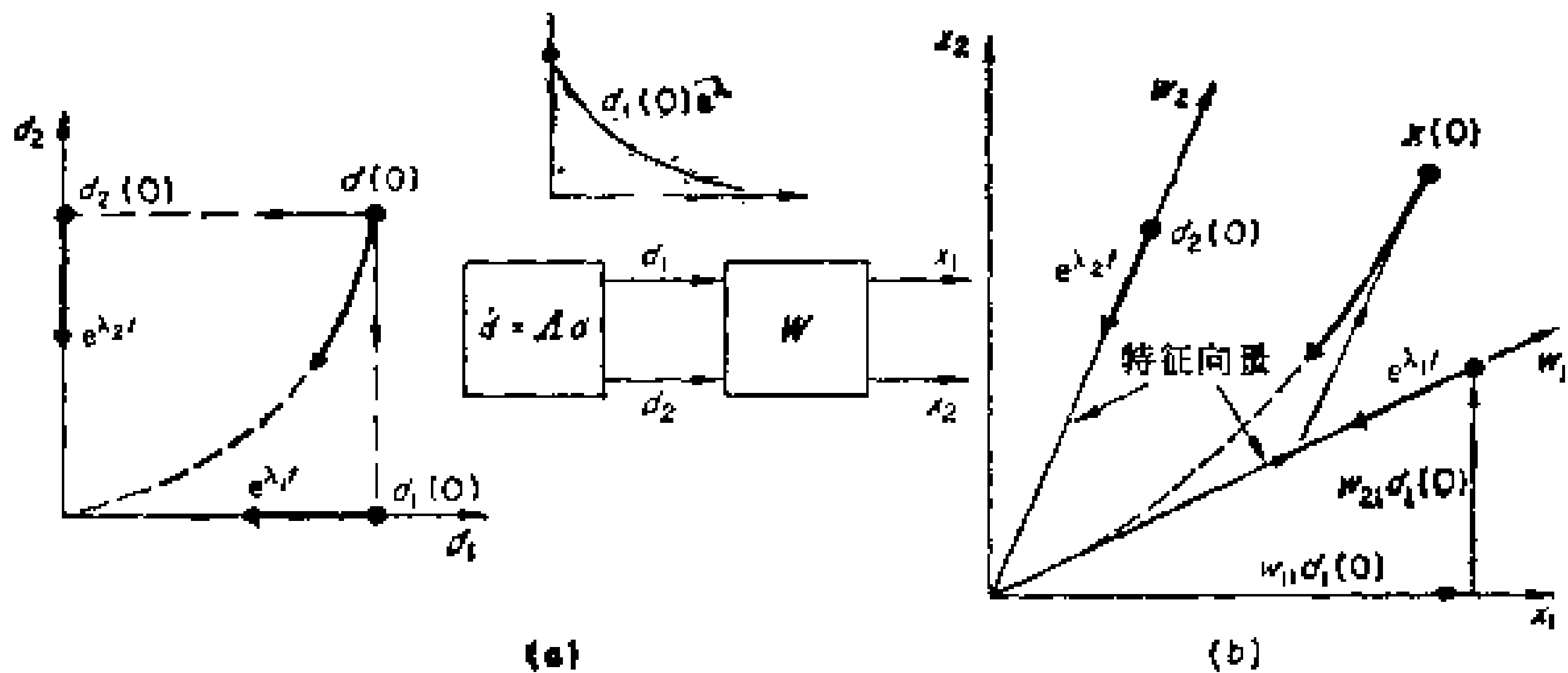


图 2.13 $\boldsymbol{d}$ 平面上和 $\boldsymbol{x}$ 平面上的轨迹：(a) $\boldsymbol{d}$ 平面；(b) $\boldsymbol{x}$ 平面

如果初始条件 $\boldsymbol{x}(0)$ 处在某一特征向量上，即 $\boldsymbol{x}(0) = c\boldsymbol{w}_k$，则由式 (2.64) 看到，只有与之对应的固有振型被激发，其轨迹是沿此特征向量的一条直线. 一般情况下，即初始条件不在任何特征向量上时，则两个固有振型都被激发，因为

$$\boldsymbol{d}(0) = \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{x}(0)$$

$\boldsymbol{d}(0)$ 被特征向量矩阵转换到 $\boldsymbol{x}$ 平面上为两个沿着特征向量 $\boldsymbol{w}_1$ 和 $\boldsymbol{w}_2$ 的分量，其和为 $\boldsymbol{x}(0)$ (见图 2.13 (b)). 当 $t > 0$，两个固有振型都从它们的初始值开始衰减，在 $\boldsymbol{d}$ 平面上描出一条轨迹，它是两个分量的和，而 $\boldsymbol{x}$ 的轨迹则是沿 $\boldsymbol{w}_1$ 变化的 $e^{\lambda_1 t}$ 和沿 $\boldsymbol{w}_2$ 变化的 $e^{\lambda_2 t}$ 之和. 对于这种有两个固有振型的系统，与较快衰减的振型对应的特征向量称为**快**特征向量，另一个称为**慢**特征向量. $\boldsymbol{x}(0)$ 的快特征向量分量衰减得快，因此，开始时 $\boldsymbol{x}$ 轨迹平行于快特征向量. 当快的分量衰减完以后，$\boldsymbol{x}$ 轨迹最终平行于慢特征向量.

例如，对于式(2.40)和(2.41)给出的系统，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{W}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

得出

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=e^{-t}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}[2\quad 1]\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}+e^{-2t}\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}[-1\quad -1]\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}$$

特征向量的方向如图 2.14(a)所示．若初始条件刚好在某个特征向量的方向上，则只有与它对应的振型被激发，而对应的初始条件零点(参阅附录 1)对消了一个极点，在本例中，

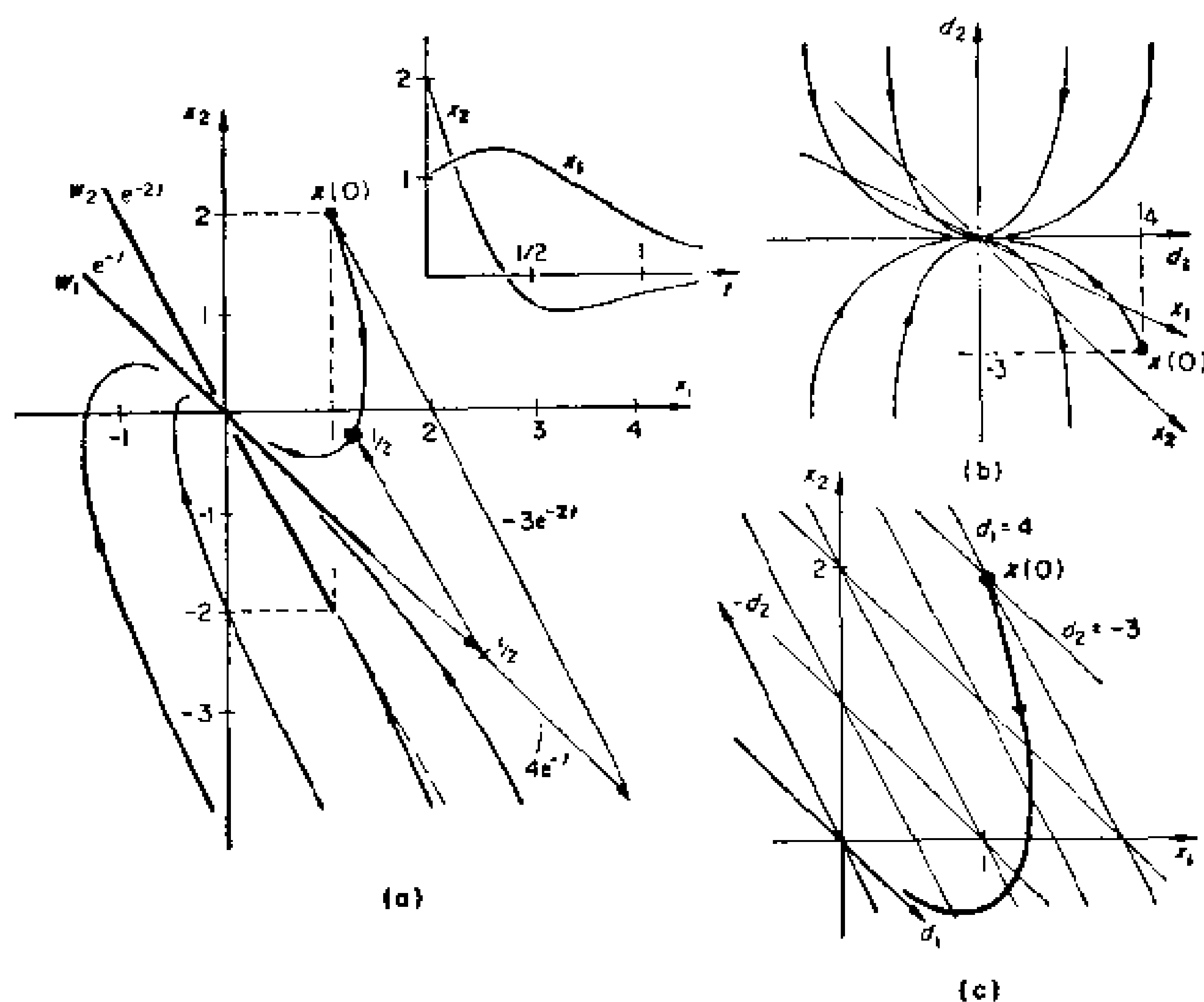


图 2.14　在 $\boldsymbol{x}$ 平面和 $\boldsymbol{d}$ 平面上的一般轨迹形态：(a) $\boldsymbol{x}$ 平面；(b) $\boldsymbol{d}$ 平面；(c) $\boldsymbol{d}$ 平面与 $\boldsymbol{x}$ 平面之间的轴和轨迹变换

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}k\\ -k\end{bmatrix}\text{只激发 } e^{-t};\quad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}k\\ -2k\end{bmatrix}\text{只激发 } e^{-2t}\qquad(2.85)$$

对更一般的情形，例如

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2.86}$$

它沿两个特征向量方向的分量如图所示，直接写出 x 的分量，就是

$$x_1(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t}$$
$$x_2(t) = -4e^{-t} + 6e^{-2t} \tag{2.87}$$

如果需要的话，分析在不同的 t 值时两个分量的衰减情况，可以准确地画出最终的轨迹．例如，对 $t = 0.5$，e^{-t} 分量衰减为它的初始值的 0.606 倍，而 e^{-2t} 分量衰减为它的初始值的 0.37 倍，得到轨迹上的各点如图中所示．这些点亦可以从式(2.87)求得：

$$x_1(0.5) = 2.43 - 1.10 = 1.33 \tag{2.88a}$$
$$x_2(0.5) = -2.43 + 2.20 = -0.23 \tag{2.88b}$$

在图中还画出了 x_1 及 x_2 的时间响应，这也可以从轨迹图形推算出来．一般来说，从各特征向量的分量之和必须得到初始条件值 $x(0)$，而随后的轨迹图形则由各特征向量分量的衰减情况来决定．在图形的下部给出一些例子．以上是以二阶系统进行论述的，但一般原理可以推广到高阶系统．

作为一个一般的例子，建议读者从式(A1.6a)和(A1.6b)并用图 A1.1 (a) 上的数值求取图 A1.1 (a)（附录 1）系统的 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{W}$，$\boldsymbol{W}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$ 矩阵，并且验证，图 A1.1(b) 所示的振型的分布与求得的特征向量是一致的．确定系统轨迹的一般形状也是很有意思的．图 A1.3 的同伴形与图 A1.1 的 $\boldsymbol{A}$ 矩阵有相似转换的关系，其转换可由每个系统（参阅式(2.52)和式(2.55)）的特征向量来确定．最后，应该看到图 A1.4(b) 的瞬态形式与同伴形中一些具体的轨迹的联系，其初始条件由式(A1.16b)得出的零点位置决定．

x 平面和 d 平面轨迹的比较

在 d 平面上，由于分量与 d 轴平行，可以由两个互相垂直的分量之和得到初始条件 $d(0)$．由此给出轨迹的简单解析形式．d 分量由下式给出．

$$d_1 = d_1(0)e^{\lambda_1 t} \tag{2.89a}$$

$$d_2 = d_2(0)e^{\lambda_2 t} \tag{2.89b}$$

由式 (2.89 a) 和 (2.89 b) 消去 t 可得到轨迹的表达式. 如果把式 (2.89) 写成

$$\lambda_1 t = \log e\{d_1/d_1(0)\} \tag{2.90a}$$

$$\lambda_2 t = \log e\{d_2/d_2(0)\} \tag{2.90b}$$

消去 t 得到

$$(1/\lambda_1)\log e(d_1/d_1(0)\} = \left(\frac{1}{\lambda_2}\right)\log e\{d_2/d_2(0)\} \tag{2.91}$$

或

$$\{d_1/d_1(0)\}^{\lambda_2} = \{d_2/d_2(0)\}^{\lambda_1} \tag{2.92}$$

$$d_2 = \{d_2(0)/d_1(0)^{\lambda_2/\lambda_1}\}d_1^{(\lambda_2/\lambda_1)} \tag{2.93}$$

式 (2.93) 是一个幂律关系:

$$d_2 = \alpha d_1^{\beta} \tag{2.94}$$

这里 $\beta = (\lambda_2/\lambda_1)$. 对于一个稳定的系统，轨迹的一般形状如图 2.14(b) 所示,在本例中轨迹是抛物线.

下列关系式:

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{x};\ \ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{d}$$

把一个平面上的完备坐标系转换到另一个平面上去. 转换后的坐标轴一般说不是正交的,坐标系统被平行地扭斜了,它的轴就象半开的栏栅那样. 由 $\boldsymbol{W}^{-1}$, 对于上述系统 (式 (2.40) 和 (2.41)), x_1 轴转换到 $\boldsymbol{d}$ 平面上为

$$d_1 = 2x_1,\ \ d_2 = -x_1\ \text{或}\ d_2 = -d_1/2$$

而 x_2 轴则为

$$d_1 = x_2,\ \ d_2 = -x_2\ \text{或}\ d_2 = -d_1$$

这些轴表示在图 2.14 (b) 中,图中并附有与图 2.14 (a) 的 $x(0)$ 对应的轨迹线. 类似地, $\boldsymbol{d}$ 坐标系统可以通过 $\boldsymbol{W}$ 转换到 $\boldsymbol{x}$ 平面上去,如图 2.14 (c) 所示,系统在 $\boldsymbol{x}$ 上的轨迹相对于扭斜的 $\boldsymbol{d}$ 坐标系是抛物线(在本例中).

2.5 复特征值

在前几节中我们讨论了有实特征值的系统，所得到的原理也适用于有复特征值的系统．复特征值对应着振荡的固有振型，在此情况下，不能对所得结果直接给出明显的轨迹解释．

作为一个例子，研究图 2.15 (a) 的系统，它的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(a^2+b^2) & -2a \end{bmatrix} \tag{2.95}$$

特征方程为

$$\begin{aligned} \det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] &= s^2 + 2as + a^2 + b^2 \\ &= (s + a + jb)(s + a - jb) \end{aligned} \tag{2.96}$$

它的复极点如图 2.15 (b) 所示，对应的固有振型为

$$\begin{aligned} \lambda_1 &: e^{(-a+jb)t} \\ \lambda_2 &: e^{(-a-jb)t} \end{aligned} \tag{2.97}$$

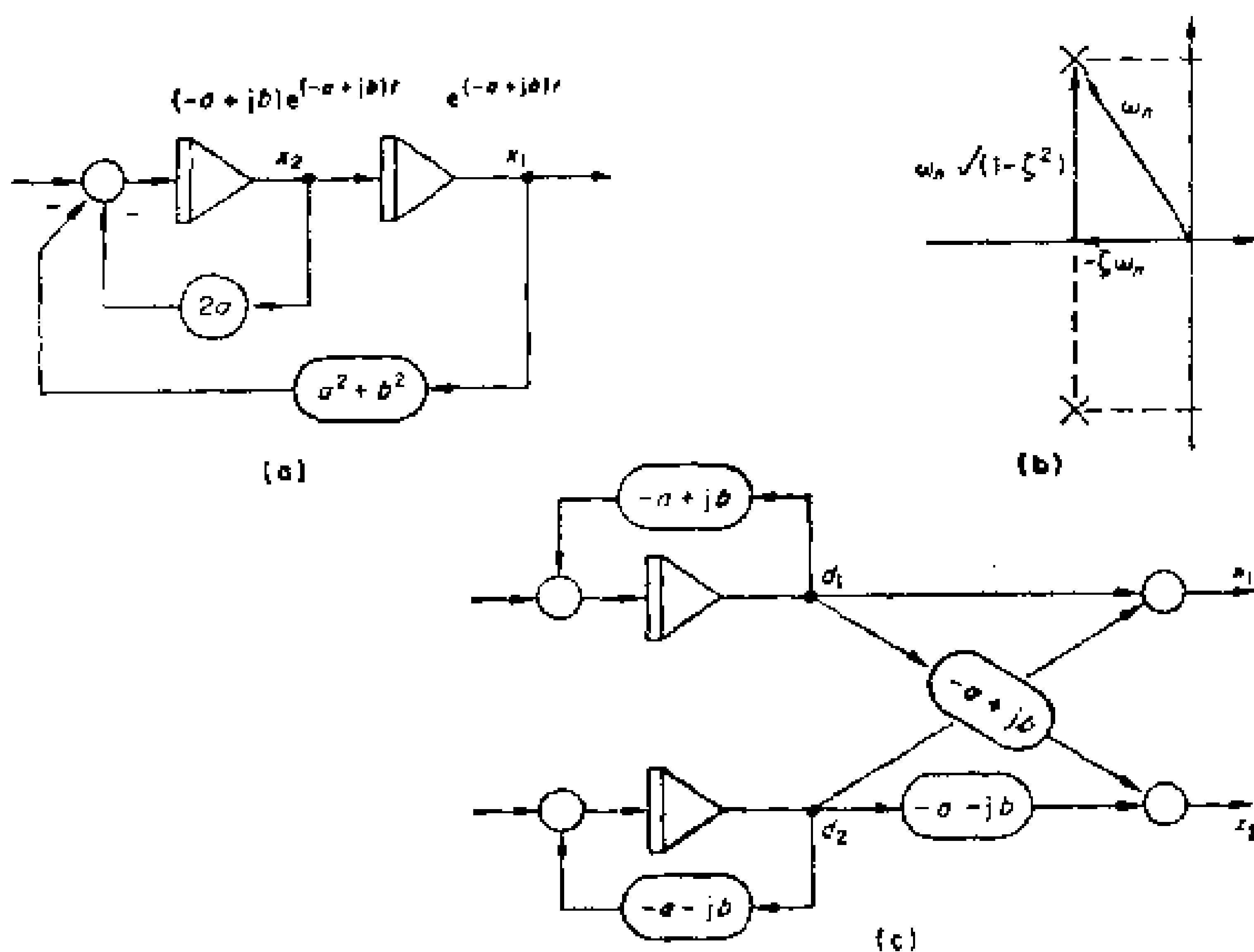


图 2.15 复特征值：(a) 系统；(b) s 平面极点；(c) 对角线系统

如果把系统写成标准化形式，其参数为阻尼系数 ξ 和无阻尼固有频率 ω_n，且 ξ，ω_n 与极点位置的关系如图 2.15 (b) 所示，则

$$\omega_n^2 = (a^2 + b^2); \quad a = \xi\omega_n$$
$$b = \omega_n\sqrt{(1 - \xi^2)} \tag{2.98}$$

可由下面一般的关系得到特征向量.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}_k = \lambda_k \boldsymbol{W}_k$$

如选 w_{11} 和 w_{12} 为 1，可求得特征向量矩阵和它的逆矩阵如下.

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ (-a + jb) & (-a - jb) \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{W}^{-1} = \frac{j}{2b}\begin{bmatrix} (-a - jb) & -1 \\ (a - jb) & 1 \end{bmatrix} \tag{2.99}$$

典型系统可由下式得出:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}$$

把式 (2.99) 代入，得到

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} (-a + jb) & 0 \\ 0 & (-a - jb) \end{bmatrix} \tag{2.100}$$

对应于图 2.15 (c).

另一方面，观察图 2.15 (a) 并假设在 x_1 处有幅值为 1 的固有振型，由微分可得到 x_2 处所对应的信号为

$$\lambda_1: (-a + jb)e^{(-a+jb)t}$$
$$\lambda_2: (-a - jb)e^{(-a-jb)t}$$

且可直接写出式 (2.99) 的特征向量矩阵. 类似地，因为典型系统必须独立地产生两个振型，它必然有式 (2.100) 的形式.

用式 (2.99)，(2.100) 及 (2.39) 给出的一般关系，得到对初始条件的响应为

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{(-a+jb)t}\begin{bmatrix} 1 \\ (-a + jb) \end{bmatrix}\frac{j}{2b}[(-a - jb) \quad -1]\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$
$$+ e^{(-a-jb)t}\begin{bmatrix} 1 \\ (-a - jb) \end{bmatrix}\frac{j}{2b}[(a - jb) \quad 1]\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \tag{2.101}$$

式 (2.101) 中的元素是复共轭的，因此，把它展开并整理后，得到纯实数形式为

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \left[e^{-at} \cos bt \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{-at} \sin bt}{b} \times \begin{bmatrix} a & 1 \\ -(a^2+b^2) & -a \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \tag{2.102}$$

实系数表示法

上面的分析式中包含有复数元素，在某些情况下，分析式中只用实数来表示是方便的，例如它可以在模拟机上实现，而对于图 2.15 (c) 的形式这是不可能的，因为那里的耦合和反馈系数是复数.

由于式(2.101)的振型和特征向量都是复共轭的，振型在$\boldsymbol{x}(t)$的分布可表示为

$$\boldsymbol{x}(t) = [\mathrm{Re}(w) + j\mathrm{Im}(w)] \frac{e^{(-a+jb)t}}{2} + [\mathrm{Re}(w) - j\mathrm{Im}(w)] \frac{e^{(-a-jb)t}}{2} \tag{2.103a}$$

或

$$\boldsymbol{x}(t) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -a \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \right) \frac{e^{(-a+jb)t}}{2} + \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -a \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \right) \frac{e^{(-a-jb)t}}{2} \tag{2.103b}$$

这可整理为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= \mathrm{Re}(w) \frac{\{e^{(-a+jb)t} + e^{(-a-jb)t}\}}{2} + j\mathrm{Im}(w) \frac{\{e^{(-a+jb)t} - e^{(-a-jb)t}\}}{2} \\ &= \mathrm{Re}(w) e^{-at} \cos bt - \mathrm{Im}(w) e^{-at} \sin bt \end{aligned} \tag{2.104}$$

可以认为式 (2.104) 表示在典型系统中含有两个实数振型

$$e^{-at} \cos bt, \quad e^{-at} \sin bt \tag{2.105}$$

它们被两个实特征向量分配，这些实特征向量是复特征向量的实分量和虚分量，即

$$\boldsymbol{W}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a & b \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{W}_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a/b & 1/b \end{bmatrix} \tag{2.106}$$

一个实数的典型系统由下式给出：

$$\boldsymbol{\Lambda}_r = \boldsymbol{W}_r^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}_r$$

由此得

$$\boldsymbol{\Lambda}_r = \begin{bmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{bmatrix} \tag{2.107}$$

图 2.16 (a) 是这个系统的方块图.

可把上面的结果写成一般的关系，即把

$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{W}$$

表示为

$$[\{\mathrm{Re}(w) + j\mathrm{Im}(w)\}\{\mathrm{Re}(w) - j\mathrm{Im}(w)\}] \begin{bmatrix} -a + jb & 0 \\ 0 & -a - jb \end{bmatrix}$$
$$= \boldsymbol{A}[\{\mathrm{Re}(w) + j\mathrm{Im}(w)\}\{\mathrm{Re}(w) - j\mathrm{Im}(w)\}] \tag{2.108}$$

把上式详细地展开，分为实部和虚部，得

实部等式　$-a\mathrm{Re}(w) - b\mathrm{Im}(w) = \boldsymbol{A}\mathrm{Re}(w)$

虚部等式　$-a\mathrm{Im}(w) + b\mathrm{Re}(w) = \boldsymbol{A}\mathrm{Im}(w)$

这可以用矩阵表示为

$$[\mathrm{Re}(w)\mathrm{Im}(w)] \begin{bmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}[\mathrm{Re}(w)\mathrm{Im}(w)] \tag{2.109}$$

或

$$\boldsymbol{W}_r\boldsymbol{\Lambda}_r = \boldsymbol{A}\boldsymbol{W}_r$$

所得的典型系统不是对角线的，而是由具有自反馈项 $-a$ 和交叉耦合项 $\pm b$ 的一对积分器组成的．在这个系统中，式 (2.105) 的两个固有振型都不能单独产生．用根轨迹来讨论，产生固有振型的条件是回路传递函数值等于 1，即

$$\frac{b^2}{(s+a)^2} = -1$$

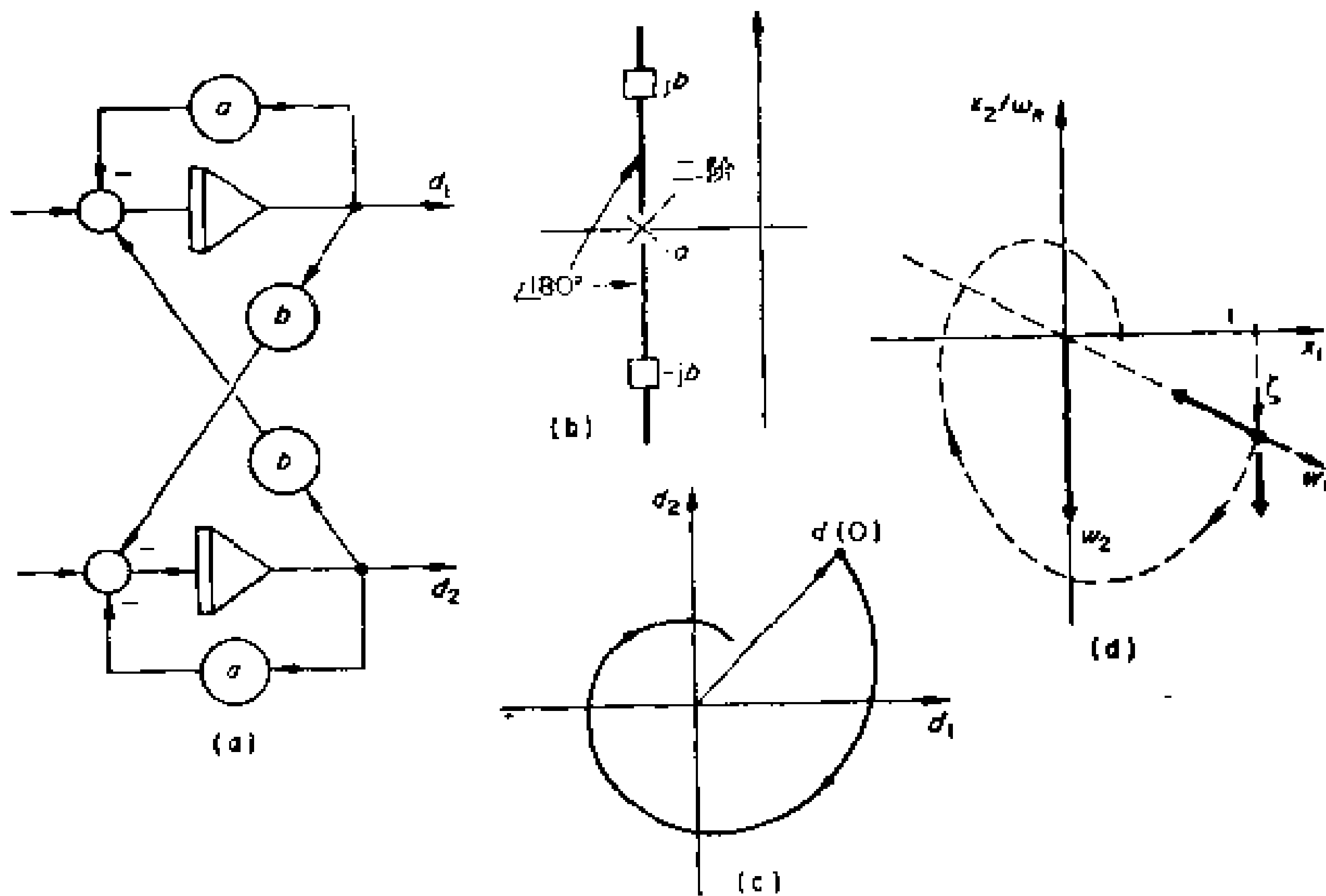


图 2.16　复特征值的实数表示法：(a) 典型系统；(b) s 平面极点；(c) 典型系统轨迹；(d) 特征向量和 x 平面轨迹

由此得出图 2.16 (b) 的图象，它的极点在 $-a \pm jb$ 处.

由初始条件 $d_1(0)$ 和 $d_2(0)$ 产生的输出是

$$\begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-at}\cos bt & e^{-at}\sin bt \\ -e^{-at}\sin bt & e^{-at}\cos bt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1(0) \\ d_2(0) \end{bmatrix} \tag{2.110}$$

在 $\boldsymbol{d}$ 平面上的轨迹是一条指数螺线，它由初始条件出发，如图 2.16 (c) 所示. 输出式 (2.110) 中的参数 a 和 b 直接与 $\boldsymbol{\Lambda}_r$ 中的元素有关. 采用运算积分器并用双联电位器来控制反馈系数 a 和 b，就可以在实际上实现 $\boldsymbol{\Lambda}_r$，这样就提供了一个坐标极点产生器，在该产生器中直接由控制装置给定动态响应的参数.

式 (2.106) 的特征向量矩阵把 d_1 和 d_2 处的响应转换到 $\boldsymbol{x}$ 平面. 如果象通常作相平面轨迹那样，将它们绘在 x_1，x_2/ω_n 轴上，则要把特征向量修改为

$$\boldsymbol{W}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\xi & \sqrt{1-\xi^2} \end{bmatrix} \tag{2.111}$$

这里考虑了式 (2.98) 的 $a = \xi\omega_n$ 和 $b = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$. 由此给出

的特征向量 $\boldsymbol{w}_1$ 和 $\boldsymbol{w}_2$ 如图 2.16 (d) 所示．必须强调的是，虽然这些特征向量分别对应于 d_1 和 d_2 的输出，但不存在沿着一个特征向量的方向的轨迹，因为不能单独在 d_1 或 d_2 处有输出．

初始条件 $d_1(0)$ 沿 $\boldsymbol{w}_1$ 给出余弦分量，沿 $\boldsymbol{w}_2$ 给出正弦分量；而 $d_2(0)$ 沿 $\boldsymbol{w}_2$ 给出余弦分量，沿 $\boldsymbol{w}_1$ 给出正弦分量．轨迹的一般形状如图 2.16 (d) 中虚线所示．这是如图 2.15 (a) 所示的阻尼二阶系统的轨迹通常具有的形状，它垂直地穿过 x_1 轴．如果 $\xi\to 0$，$\boldsymbol{w}_1$ 转向平行于 $\boldsymbol{x}_1$ 轴，而固有振型变成 $\cos bt$ 和 $\sin bt$，此时振荡系统有圆形的轨迹．对不稳定的系统，$\boldsymbol{w}_1$ 越过 $\boldsymbol{x}_1$ 轴而转到上方．上面得到的实数系统可以作为式 (2.101) 的复数系统的一个较为简单的替换，而初始条件的响应可直接写为

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\-a & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-at}\cos bt & e^{-at}\sin bt\\-e^{-at}\sin bt & e^{-at}\cos bt\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0\\a/b & 1/b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}\tag{2.112}$$

由此即可得到式 (2.102)．

作为例子，对于系统

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\-17 & -4\end{bmatrix};\quad \lambda=-3\pm j4;\ \boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}1 & 1\\-1+j4 & -1-j4\end{bmatrix}\tag{2.113}$$

将特征向量分成实分量和虚分量，有

$$\boldsymbol{W}_r=\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 4\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{W}_r^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\1/4 & 1/4\end{bmatrix}\tag{2.114}$$

因而

$$\boldsymbol{A}_r=\boldsymbol{W}_r^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}_r=\begin{bmatrix}-3 & 4\\-4 & -3\end{bmatrix}\tag{2.115}$$

如预期的那样，它有式 (2.107) 的交叉耦合的形式．上面的一般原则可以应用到高维系统，例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\\-2 & -1 & -3\end{bmatrix};\ \lambda=-3,\ -1\pm j1;$$

$$W=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & j1 & -j1\\ 4 & -1 & -1\end{bmatrix} \tag{2.116}$$

将第二、三列分成实分量和虚分量，得

$$W_r=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\\ 4 & -1 & 0\end{bmatrix};\ W_r^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 4 & 0 & -1\\ 2 & 5 & 2\end{bmatrix} \tag{2.117}$$

$$(\boldsymbol{w}_1)(\boldsymbol{w}_2)(\boldsymbol{w}_3)$$

对此有

$$A_r=W_r^{-1}AW_r=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix} \tag{2.118}$$

这说明得到预期的形式，它有一个被分隔开的实振型和一个给出复特征值的全实数交叉耦合系统．复数振型由特征向量 $\boldsymbol{w}_2$ 和 $\boldsymbol{w}_3$ 分配，$\boldsymbol{w}_2$ 和 $\boldsymbol{w}_3$ 在 $\boldsymbol{x}$ 中确定一个平面，它包含了所有振荡振型的轨迹，而实振型沿 $\boldsymbol{w}_1$ 出现（见图 2.17 (a)）．在本例中，$\boldsymbol{w}_2$ 和 $\boldsymbol{w}_3$ 在 $\boldsymbol{x}$ 中是互相垂直的,但一般不一定是这样. $\boldsymbol{w}_1$ 不是垂直于振荡振型平面的．所有系统的轨迹都由两个振型构成,一个是在被 $\boldsymbol{w}_2$ 和 $\boldsymbol{w}_3$ 确定的平面上的振荡振型，另一个是沿着 $\boldsymbol{w}_1$ 的指数振型．由轨迹点在相应轴上的投影得到各状态变量的信号.

对于现在的三维空间,通过原点的平面的方程式是

$$m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3=0 \tag{2.119a}$$

或

$$\boldsymbol{m}^T\boldsymbol{x}=0 \tag{2.119b}$$

满足式 (2.119b) 的任何向量 $\boldsymbol{x}_k$ 处在此平面上．于是，包含特征向量的平面由下式给出:

$$\boldsymbol{m}^T\boldsymbol{w}_2=0;\ \boldsymbol{m}^T\boldsymbol{w}_3=0 \tag{2.120}$$

于是

$$m_1-m_3=0;\ m_2=0$$

且(若 $m_1=1$) 平面由下式确定:

$$x_1 + x_3 = 0 \tag{2.121}$$

这就是图 2.17 (a) 画出的平面. 任意的初始条件由这个平面上的一个分量和沿着实振型特征向量 $\boldsymbol{w}_1$ 的一个分量得到. 要得到

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

的分量如图 2.17 (b) 所示. 由式 (2.116) 和式 (2.117) 可验证 $\boldsymbol{x}(t)$ 为

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-3t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t}\cos t + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-t}\sin t \tag{2.122}$$

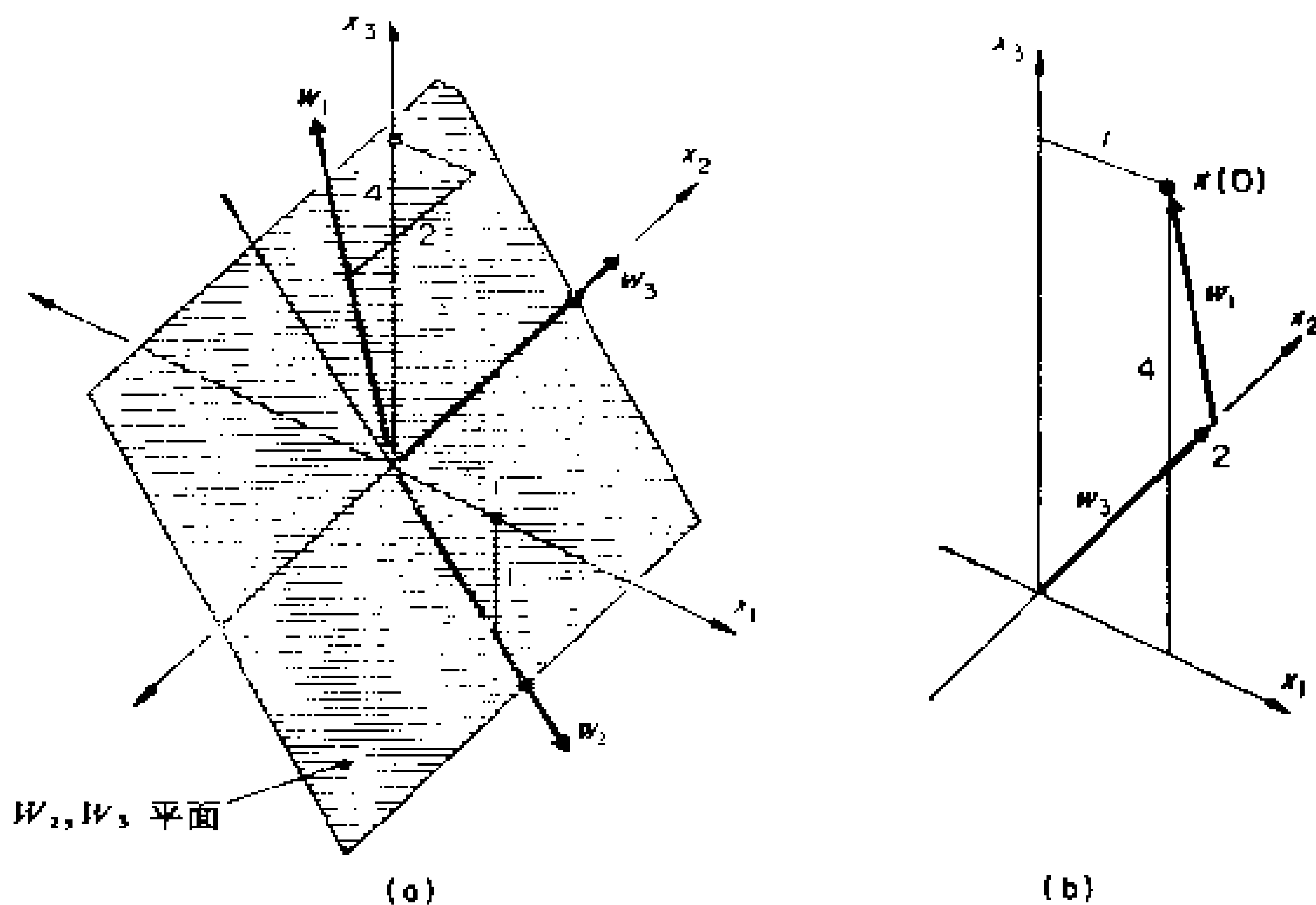


图 2.17 三阶系统: (a) 复数振型平面; (b) 初始条件的各特征向量分量

2.6 重特征值

在已讨论过的所有情况中,特征值都是各不相同的,用复频分

析的术语来说，这就是系统有简单极点的情况．可能会出现多重特征值即有多重极点的情况． 对于在 s_j 上有多重极点的传递函数，即当

$$T(s)=F(s)\frac{1}{(s-s_j)^n} \tag{2.123}$$

时，重极点引起的时间函数是

$$a_1e^{s_jt}+a_2te^{s_jt}+a_3\frac{t^2}{2!}e^{s_jt}+\cdots+a_n\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{s_jt} \tag{2.124}$$

这里 $a_1, \cdots, a_n$ 取决于传递函数的余项 $F(s)$． 分别激发式(2.124)的每个分量是不可能的，在典型系统中对应于重特征值的部分是局部地交叉耦合的，但不如前述的复特征值的情况耦合得那么紧．可以从多方面去讨论具有多重特征值的系统的性质．

(1) 直接置入固有振型

图 2.18 (a) 的系统有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix} \tag{2.125}$$

其特征方程是

$$s^2+2s+1=(s+1)^2=0 \tag{2.126}$$

它有重极点即特征值

$$\lambda_1,\ \lambda_2=-1 \tag{2.127}$$

两个固有振型为

$$e^{-t},\ te^{-t} \tag{2.128}$$

如果令 $x_1=e^{-t}$，可在图 2.18 (a) 中得出与之对应的各变量的值，这些值满足图中的关系式．如果令 x_1 为另一个振型 $(x_1=te^{-t})$，得出对应的各值见图 2.18 (a)．这些值也都满足图中的关系式，因为

$$\dot{x}_2=e^{-t}(t-2) \tag{2.129a}$$

$$-2x_2-x_1=e^{-t}(t-2) \tag{2.129b}$$

但重要的事实是，不能单独由 te^{-t} 满足关系式．为了满足关系式还要有前面的振型 e^{-t}．所以，不能独立产生振型 te^{-t}．

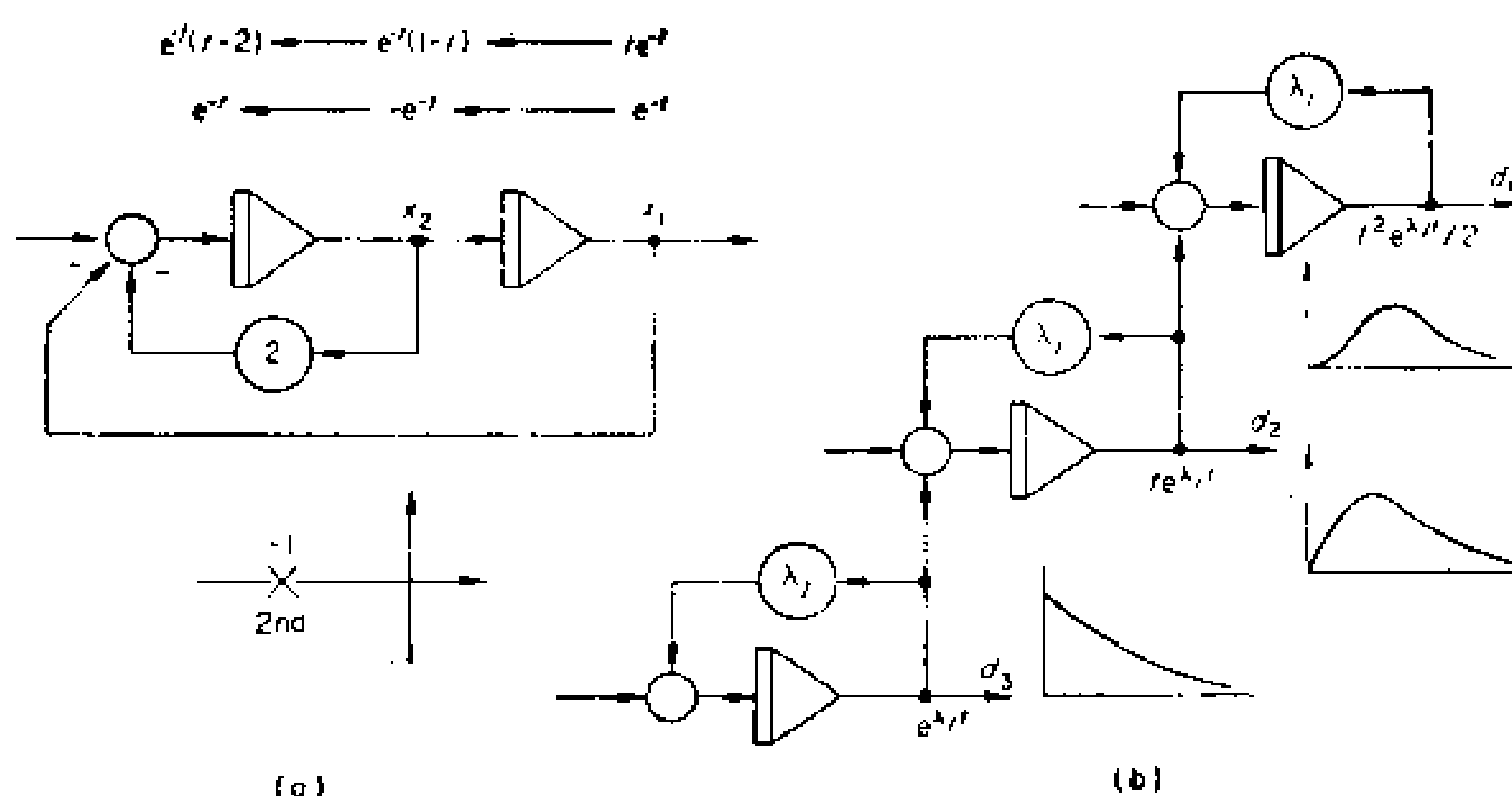


图 2.18 重特征值：(a) 系统和 s 平面极点；(b) 三阶约当块

(2) 复平面描述

状态向量在 s 域的一般关系为

$$\boldsymbol{x}(s)=[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{x}(0)$$

用于系统矩阵式(2.125)，得出

$$\begin{bmatrix}x_1(s)\\x_2(s)\end{bmatrix}=\frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix}(s+2) & 1\\-1 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}\tag{2.130}$$

因此

$$x_1(s)=\frac{(s+2)x_1(0)+x_2(0)}{(s+1)^2}\tag{2.131a}$$

$$x_2(s)=\frac{sx_2(0)-x_1(0)}{(s+1)^2}\tag{2.131b}$$

在 $x_1(s)$ 和 $x_2(s)$ 的图象中都有由初始条件所决定的零点，这些零点可由式(2.131a)及(2.131b)求出. 为了在系统中只产生 e^{-t}，则在式(2.131a)和(2.131 b)中，初始条件零点必须在 $s=-1$ 处，从而使两个图象都简化为只有一个简单极点. 如果满足下式，就可做到这一点.

$$x_2(0)=-x_1(0)\tag{2.132}$$

为了单独得到 te^{-t}，式(2.131a)和(2.131b)必须在 $s=-1$ 处都有双重极点，而且没有零点．这个条件要求：

$$对\ x_1\ 式\quad x_1(0)=0,\ x_2(0)\ 为有限值 \tag{2.133a}$$

$$对\ x_2\ 式\quad x_2(0)=0,\ x_1(0)\ 为有限值 \tag{2.133b}$$

由于不能同时满足式(2.133a)和(2.133 b)，所以不能单独产生振型 te^{-t}.

(3) 特征向量法

对于特征值 λ_j 为 n 重的情形，必定有 n 个与该特征值有关的特征向量．然而在特征向量关系式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}_1=\lambda_j\boldsymbol{w}_1 \tag{2.134}$$

中只能用一个 λ_j 值，它只产生一个特征向量 $\boldsymbol{w}_1$，而其余的特征向量 $\boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n$ 必须另行求出.

为了说明获得其余的特征向量的方法，暂时可先假定系统只有一个重极点或特征值，并讨论对应的典型系统的形式．对于有三重特征值 λ_j 的系统，在典型系统中必须产生下面的固有振型.

$$e^{\lambda_j t},\ te^{\lambda_j t},\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda_j t} \tag{2.135}$$

这都可由图 2.18(b) 的三级串联的回路产生． 初始条件 $d_1(0)$ 激发起

$$d_1=d_1(0)e^{\lambda_j t} \tag{2.136a}$$

而 $d_2(0)$ 给出

$$d_2=d_2(0)e^{\lambda_j t};\ d_1=d_2(0)te^{\lambda_j t} \tag{2.136b}$$

$d_3(0)$ 给出

$$d_3=d_3(0)e^{\lambda_j t};\ d_2=d_3(0)te^{\lambda_j t};\ d_1=d_3(0)\frac{t^2}{2}e^{\lambda_j t} \tag{2.136c}$$

这样，图 2.18 (b) 的系统可以产生所要求的固有振型． 既然式(2.136)的高阶振型是将 $e^{\lambda_j t}$ 积分而产生的，如果不产生全部较低阶的振型，就不可能产生较高阶的振型． 这也是在 2.6 (1) 和 2.6 (2) 节讨论过的二阶系统的特性.

与图 2.18 (b) 的系统对应的矩阵是

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_j & 1 & 0\\ 0 & \lambda_j & 1\\ 0 & 0 & \lambda_j\end{bmatrix} \tag{2.137}$$

在主对角线上方有 1 的项，它对应于积分器的串联连接. 所以，典型系统是局部交叉耦合的，但不象复特征值（图 2.16(a)）的实数描述那样完全地交叉耦合. 对目前的系统，将有一般关系式

$$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}$$

可以把它写为

$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{W} \tag{2.138}$$

假设 $\boldsymbol{W}$ 包含三个特征向量：

$$\boldsymbol{W}=[\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{w}_2\ \boldsymbol{w}_3] \tag{2.139}$$

展开式 (2.138) 给出

$$[\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{w}_2\ \boldsymbol{w}_3]\begin{bmatrix}\lambda_j & 1 & 0\\ 0 & \lambda_j & 1\\ 0 & 0 & \lambda_j\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{w}_1\ \ \boldsymbol{w}_2\ \ \boldsymbol{w}_3] \tag{2.140}$$

乘出后得

$$[\boldsymbol{w}_1\lambda_j\ \ \boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2\lambda_j\ \ \boldsymbol{w}_2+\boldsymbol{w}_3\lambda_j]=[\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{w}_2\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{w}_3] \tag{2.141}$$

比较式 (2.141) 两边得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}_1=\lambda_j\boldsymbol{w}_1 \tag{2.142a}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}_2=\lambda_j\boldsymbol{w}_2+\boldsymbol{w}_1 \tag{2.142b}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}_3=\lambda_j\boldsymbol{w}_3+\boldsymbol{w}_2 \tag{2.142c}$$

可由式 (1.42a) 求出第一个特征向量 $\boldsymbol{w}_1$，由式 (2.142b) 求出第二个特征向量 $\boldsymbol{w}_2$，然后由式 (2.142c) 得到 $\boldsymbol{w}_3$. 用这个方法，可依次地从 $\boldsymbol{w}_1$ 开始求出各个特征向量. 我们可以把这个原理推广到更高阶的系统. 严格说来，上面的向量 $\boldsymbol{w}_2$ 和 $\boldsymbol{w}_3$ 不是特征向量，因为由定义，特征向量必须满足关系式：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}_k=\lambda_k\boldsymbol{w}_k$$

在式 (2.142a) 中 $\boldsymbol{w}_1$ 的确满足了上述关系，$\boldsymbol{w}_2$ 和 $\boldsymbol{w}_3$ 则不然. 它们称为**广义特征向量**，尽管把它们简称为特征向量是方便的.

将上面的方法用于前面已讨论过的式(2.125)的简单系统，由

式 (2.142a) 可得到第一个特征向量 $\boldsymbol{w}_1$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ w_{21} \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 1 \\ w_{21} \end{bmatrix} \tag{2.143}$$

其中假设 w_{11} 为 1. 由此可求出 $w_{21} = -1$. 因此

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{2.144}$$

第二个特征向量 $\boldsymbol{w}_2$ 可由式 (2.142b) 求出.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ w_{22} \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 1 \\ w_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{2.145}$$

由此得 $w_{22} = 0$, 因而

$$\boldsymbol{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.146}$$

于是,特征向量矩阵为

$$\boldsymbol{W} = [\boldsymbol{w}_1 \ \ \boldsymbol{w}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.147}$$

且

$$\boldsymbol{W}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.148}$$

作为验证,可以由一般关系式求出典型系统,

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}$$

对于式 (2.125) 可得

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.149}$$

它描述了图 2.19 (a) 的系统. 在 d_2 可以产生的振型仅仅是 e^{-t}, 由于交叉耦合,它在 d_1 产生 te^{-t}. 如果初始条件为 $d_2(0) = 0$, 这对应于 $x_1(0)/x_2(0) = -1$ (参阅式 (2.132)),则在 d_1 处可单独产生振型 e^{-t}. 也可以在 d_1 单独产生 te^{-t}, 但必须在 d_2 处伴随有 e^{-t}. 在此系统中单独产生 te^{-t} 振型是不可能的.

在 $\boldsymbol{d}$ 平面上,初始条件 $d_1(0)$ 只产生沿 d_1 的运动,而初始条件

$d_2(0)$ 沿着 d_2 产生 e^{-t}，并沿着 d_1 产生 te^{-t}，其轨迹如图 2.19 (a)

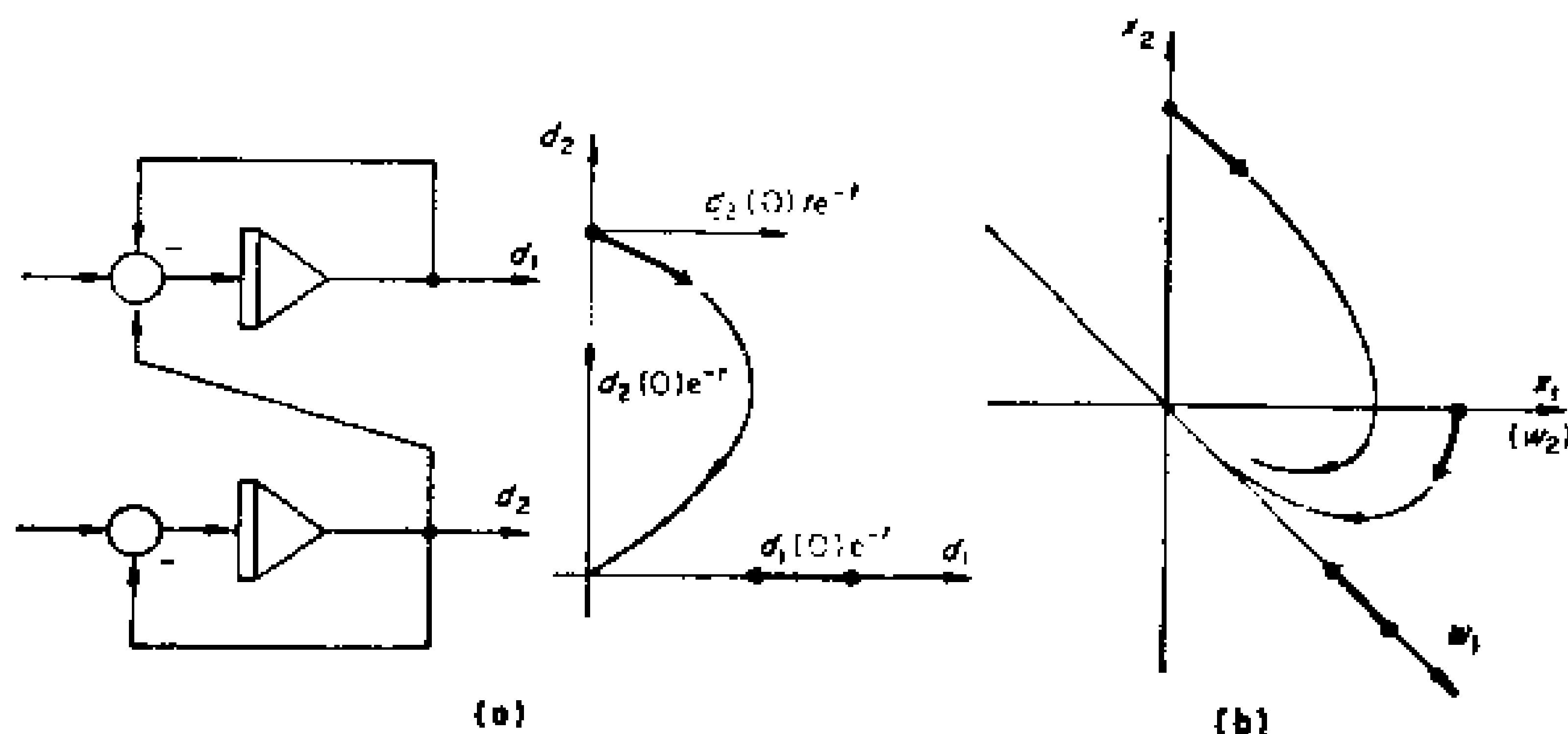


图 2.19　重特征值：(a)，(b) 典型系统和轨迹；(c)，(d) 特征向量和 x 平面轨迹

所示．在 x 平面（图 2.19(b)）上，对任一 d_1 的信号，其特征向量 w_1 有 -1 的斜率，而对于 d_2 的特征向量 w_2 则沿着 x_1 方向．图中在 x 平面上画出了几条由不同的初始条件产生的轨迹．从不重复的特征值变化到重复的特征值，轨迹的实际形状几乎不发生变化．

典型系统的矩阵在主对角线的上方有数值为 1 的元素是重特征值的特点．对于有特征值 λ_1，λ_1，λ_1，λ_2，λ_3 的系统，对应的典型系统矩阵为

$$
\Lambda = \left[\begin{array}{ccc|cc}
\lambda_1 & 1 & 0 & & \\
 & \lambda_1 & 1 & & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & & \lambda_1 & & \\
\hline
 & & & \lambda_2 & \\
 & \mathbf{0} & & & \lambda_3
\end{array}\right] \qquad (2.150)
$$

称此为约当典型形式．对应于重特征值的虚线框块称为约当块．纯对角线系统是约当典型形式的特殊情况．一个系统可以有两个不同的重特征值．含有三重 λ_1、二重 λ_2 以及 λ_3 的系统 Λ_1，其典型结构为

$$
\boldsymbol{\Lambda}_1 = \left[\begin{array}{ccc:cc:c} \lambda_1 & 1 & 0 & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & & \lambda_1 & & & \\ \hdashline & & & \lambda_2 & 1 & \\ & \mathbf{0} & & 0 & \lambda_2 & \\ \hdashline & & & & & \lambda_3 \end{array}\right]; \quad \boldsymbol{\Lambda}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & \mathbf{0} & \\ & \mathbf{0} & \lambda_2 & \\ & & & \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{2.151}
$$

它包含两个约当块，每个从属于一个特征值.

一个可能的特殊情况是，典型系统可以包含两个完全相同的振型发生器，它们之间互不耦合．一般形式如式(2.151)中的 $\boldsymbol{\Lambda}_2$，它的特征值 λ_1 就是这种情况.

下例就是这样的一个系统

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.152}
$$

它有特征值 $\lambda = -1, -1, 3$．振型 e^{-t} 的分布不是唯一的．象复数振型那样，它出现在 $\boldsymbol{x}$ 的一个平面上．由此平面上任一 $\boldsymbol{x}(0)$ 出发的轨迹是通到原点的直线．在系统中不出现振型 te^{-t}.

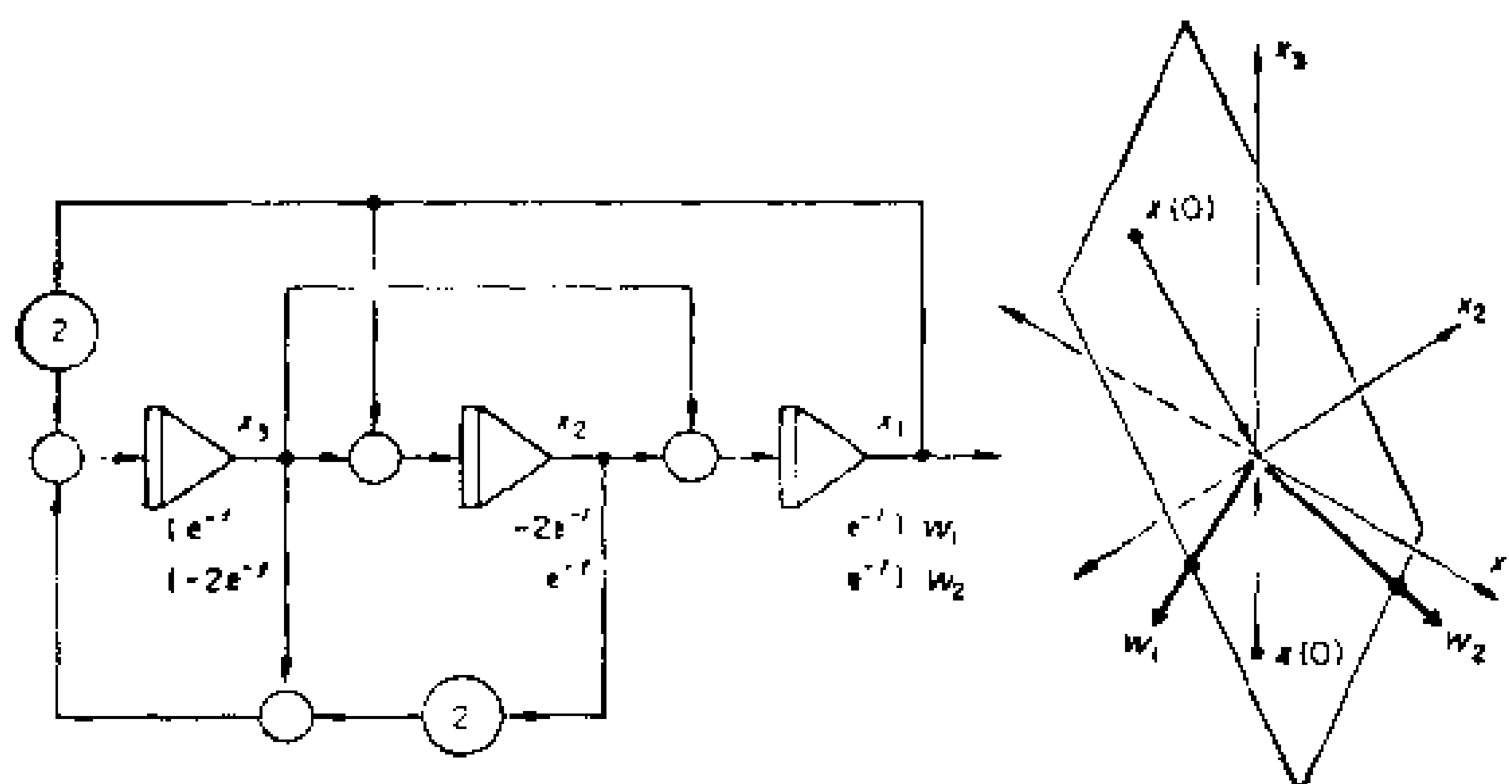


图 2.20 不耦合的重特征值：(a) 振型的分布；(b) 重振型的平面图

特征向量 $\boldsymbol{w}_1$ 和 $\boldsymbol{w}_2$ 给出振型 e^{-t} 的两种可能的分布.

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad (2.153)$$

这可由图 2.20 验证．这一对特征向量不是唯一的，平面上任一对向量都可以作为特征向量．这些特性的论据与 $\lambda_1 = -1$ 时 $[\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}]$ 的秩有关，并在附录 2 中论述．

本章叙述了状态变量分析的最重要的原理，如特征值和典型系统，特征向量，振型的分布和轨迹等．我们尽可能地运用复频分析和有关理论来介绍这些概念．论述时引用了方块图，并且限于讨论二维与三维系统的情况，这就使我们能够得到直观的和几何的解释．本章的材料在第一章末关于状态变量分析的参考文献中有所论述，更详尽的论述可参考下列文献．

参 考 文 献

关于状态变量分析的进一步的读物

Athans, P. M., and Falb, P. L., *Optimal Control* (McGraw-Hill New York, 1966).

Huelsman, L. P., *Circuits, Matrices and Linear Vector Spaces* (McGraw-Hill, New York, 1963).

Ogata, K., *State Space Analysis of Control Systems* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1967).

Rosenbrock, H. H., *State-space and Multivariable Theory* (Nelson, London, 1970).

Russo, P. M., Roy, R. J., and Close, C. M., *State Variables for Engineers* (Wiley, New York, 1965).

Timothy, L. K., and Bona, B. E., *State Space Analysis—An Introduction* (McGraw-Hill, New York, 1968).

Zadeh, L. A., and Desoer, C. A., *Linear System Theory* (McGraw Hill, New York, 1963).

关于系统理论的背景读物

Barnett, S., *Introduction to Mathematical Control Theory* (Oxford University Press, 1975).

Chen, C. T., *Introduction to Linear System Theory* (Holt, Rinehart and Winston, New York, 1970).

Desoer, C. A., *Notes for a Second Course on Linear Systems* (Van Nostrand Reinhold, New York, 1970).

Director, S. W., and Rohrer R. A., *Introduction to System Theory* (McGraw-Hill, New York, 1972).
MacFarlane, A. G. J., *Dynamical System Models* (Harrap, London, 1970).

习　　题

2.1　对系统

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}$$

试确定特征值与特征向量，并在 x 平面上画出特征向量。用根轨迹图验证特征值，用系统中振型的分布验证特征向量。设

$$x(0)=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}$$

在 x 平面上直接考察初始条件沿各特征向量的分量，写出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的表达式。由 $\dot{x}=Ax$ 确定 $\dot{x}(0)$，并画出轨迹一般形状的简图。

用典型系统方块图以及 W 和 W^{-1}，在上述的初始条件下，验证 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的结果。

$$\left(\begin{array}{l}\lambda_1=3,\ w_1=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix};\ \lambda_2=-1,\ w_2=\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}\\ \text{对 } x(0)=\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix},\ x_1(t)=e^{3t}+e^{-t};\ x_2(t)=2(e^{3t}-e^{-t})\\ \text{对 } x(0)=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix},\ x_1(t)=(e^{3t}-e^{-t})/2;\ x_2(t)=e^{3t}+e^{-t}\end{array}\right)$$

2.2　对

$$A=\begin{bmatrix}-1.5 & 1\\ 0.25 & -1.5\end{bmatrix}$$

确定特征值和特征向量。利用特征向量的分量画出由

$$x(0)=\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}2\\ 0.5\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

出发的轨迹。检验轨迹的 $\dot{x}(0)$ 是否正确，并确定轨迹方向为水平或垂直时的迹线。

$$\left(\begin{array}{l}\lambda_1=-1,\ w_1=\begin{bmatrix}1\\ 0.5\end{bmatrix};\ \lambda_2=-2,\ w_2=\begin{bmatrix}1\\ -0.5\end{bmatrix}\\ \text{垂直方向}\ (\dot{x}_1=0)\ \text{的迹线：}\ x_2=1.5x_1\\ \text{水平方向}\ (\dot{x}_2=0)\ \text{的迹线：}\ x_2=x_1/6\end{array}\right)$$

2.3　对系统

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$$

由 $\det[sI-A]=0$ 确定特征值，由 $Aw_k=\lambda_k w_k$ 确定特征向量。

画出方块图，并用根轨迹法验证特征值，由系统中振型的分布验证特征向量。

$$\left(\lambda=-1\pm j1;\quad W=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1+j1 & 1-j1\end{bmatrix}\right)$$

2.4　对习题 2.3 的系统试展开一般关系式

$$x(t)=W\begin{bmatrix}e^{\lambda t} & 0\\ 0 & e^{\bar{\lambda}t}\end{bmatrix}W^{-1}x(0)$$

这里 λ，$\bar{\lambda}$ 是共轭复数，并经化简证明

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}e^{-t}(\cos t-\sin t) & e^{-t}\sin t\\ -2e^{-t}\sin t & e^{-t}(\cos t+\sin t)\end{bmatrix}$$

$$\left(e^{-t}\cos t,\ w=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix};\ e^{-t}\sin t,\ w=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix};\ \Lambda_r=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\right)$$

2.5　假定 $e^{-t}\cos t$ 是习题 2.3 系统的一个振型的实数形式，确定对应的 W_r 矩阵。然后验证由

$$\Lambda_r=W_r^{-1}AW_r$$

得到的典型系统 Λ_r 有全实数表达式的预期形式。

2.6　由习题 2.5 的 W_r 矩阵，在 x 平面上画出特征向量，由特征向量确定从

$$x(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

出发的轨迹上的几个点。注意轨迹并不垂直地通过 x_1 轴，为什么？

$(a_{11}\neq 0)$

2.7　把凯莱-哈密尔顿定理（见 1.4 节）应用到具有共轭复特征值 λ_1，$\bar{\lambda}_1$ 的系统，我们就得到

$$e^{\lambda_1 t}=b_0+b_1\lambda_1+b_2\lambda_1^2+\cdots$$

$$e^{\bar{\lambda}_1 t}=b_0+b_1\bar{\lambda}_1+b_2\bar{\lambda}_1^2+\cdots$$

由 $e^{\lambda_1 t}$ 和 $e^{\bar{\lambda}_1 t}$ 可求得 b_0，b_1，…。

试把这些关系用于习题 2.3 的系统，证明

$$b_0=e^{-t}(\cos t+\sin t);\quad b_1=e^{-t}\sin t$$

从而证明由凯莱-哈密尔顿定理得出的 $\Phi(t)$ 与习题 2.4 的 $\Phi(t)$ 相符。

2.8　对系统

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -5 & -7 & -3\end{bmatrix}$$

求出含有复数元素的特征值和特征矩阵. 分开特征向量的实部分量和虚部分量，求出典型系统的纯实数形式 $\boldsymbol{\Lambda}_r$，由特征值应该估计到 $\boldsymbol{\Lambda}_r$ 具有这种形式.

详细展开 $[sI-\boldsymbol{\Lambda}_r]^{-1}$，考虑典型系统方块图中的传递函数，由此验证，它的元素是如所预料的.

$$\left(\begin{aligned}&\lambda=-1;\ -1\pm j2;\\ &\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -1+j2 & -1-j2\\ 1 & -3-j4 & -3+j4\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{\Lambda}_r=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & -2 & -1\end{bmatrix}\end{aligned}\right)$$

2.9 对系统

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ -2 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

试用分析方法决定其特征值和特征向量. 在方块图中用根轨迹法和振型分布法加以验证.

$$\left(\lambda=-2,\ \pm j1;\ \boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & j & -j\\ 2 & -1+j & -1-j\end{bmatrix}\right)$$

2.10 对于习题 2.9 的系统，试假定一个复数振型的实数形式，然后由系统中振型的分布决定 $\boldsymbol{W}_r$. 由

$$\boldsymbol{\Lambda}_r=\boldsymbol{W}_r^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}_r$$

验证典型系统具有所预料的形式.

$$\left(\begin{aligned}&\text{振型: } \cos t,\ \sin t\ (\text{假定 } x_1 \text{ 为 } \cos t)\\ &\boldsymbol{W}_r=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & -1\\ 2 & -1 & -1\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{\Lambda}_r=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\end{aligned}\right)$$

2.11 由习题 2.10 的 $\boldsymbol{W}_r$，证明振荡振型的轨迹落在 $\boldsymbol{x}$ 空间的平面 $x_1-x_2+x_3=0$ 上. 在 $\boldsymbol{x}$ 空间中画出此平面的方向. 画出轨迹在 x_1, x_2 和 x_2, x_3 平面上的投影. 由方块图验证轨迹的投影正是所预期的.

（x_1, x_2 圆形; x_2, x_3 椭圆形）

2.12 试用凯莱-哈密尔顿定理，由习题 2.9 的特征值象习题 2.7 那样组合

各项，来求得

$$\Phi(t) = Ib_0 + Ab_1 + A^2b_2$$

中所有实值 b_0，b_1 和 b_2。展开 $[sI - A]^{-1}$ 以求出 $\Phi(s)$ 中的某些元素，例如 $\phi_{11}(s)$，$\phi_{22}(s)$，然后反变换求得 $\phi_{11}(t)$，$\phi_{22}(t)$，以验证上面 $\Phi(t)$ 中对应的元素。

注意：按

$$\frac{r_1s + r_2}{s^2 + \omega^2} \rightarrow r_1\cos\omega t + (r_2/\omega)\sin\omega t$$

把 $\phi_{11}(s)\cdots$ 展开为部分分式，可直接反变换为 sin 和 cos 的形式。

$$\left(\begin{array}{l} b_0 = (e^{-t} + 2\sin t + 4\cos t)/5; \ b_1 = \sin t; \\ b_2 = (e^{-2t} + 2\sin t - \cos t)/5 \\ \phi_{11}(s) = (s+1)^2/D(s); \ \phi_{22}(s) = \phi_{33}(s) = s(s+1)/D(s) \\ D(s) = s^3 + 2s^2 + s + 2 \end{array}\right)$$

2.13　对一个具有复数振型 $e^{(-a\pm jb)t}$ 的三维同伴形系统，求出包含振荡振型的平面的一般表达式。这可直接从式(2.120)用复特征向量获得。如果 λ_1，$\lambda_2 = -1\pm j1$，$\lambda_3 = -1$，绘出对于 λ_1 的特征向量和振荡振型平面。

在复数振型平面上的任意两个独立向量均可作为特征向量。对于上面的 λ_1 和 λ_2，证明向量

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}; \quad w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

在复数振型平面上。然后加上相应于 $\lambda_3(=-1)$ 的 w_3 来构成 W_r，注意到 A 是同伴形，求出典型系统，然后验证，它产生所要求的振型。

$$\left(\begin{array}{c} x_1(a^2 + b^2) + 2ax_2 + x_3 = 0 \\ \Lambda_r = \begin{bmatrix} -3/2 & -1/2 & 0 \\ 5/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}\right)$$

2.14　对

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

展开 $[sI - A]^{-1}$ 并进行反变换，以获得 $\Phi(t)$。

画出典型系统以及 W 和 W^{-1} 矩阵的方块图。由考察典型系统产生的振型证明由 $[sI - A]^{-1}$ 确定的 $\Phi(t)$ 是正确的。

$$\left(\Phi(t) = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + te^{-t}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

2.15　对习题 2.14 的系统，应用凯莱-哈密尔顿定理只能得到一个关系式：

$$e^{\lambda t} = b_0 + \lambda b_1 + \lambda^2 b_2 + \cdots$$

上式对 λ 多次求导数可得到附加的关系式。

$$te^{\lambda t} = b_1 + 2\lambda b_2 + 3\lambda^2 b_3 + \cdots$$

$$t^2 e^{\lambda t} = 2b_2 + 6\lambda b_3 + \cdots$$

试用这个定理去求习题 2.14 中的 $\boldsymbol{\Phi}(t)$。

2.16　设二阶系统具有重特征值 $-\lambda_1$，考察由典型系统产生的振型，证明任何初始条件产生的轨迹都由沿着通过原点的一条直线的分量和另一个特殊方向的分量之和构成。

对于系统

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{且 } \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

利用上面的结果草绘出初始条件产生的轨迹并估计当 $t = 1/2, 1$ 时 $\boldsymbol{x}(t)$ 的值。应用凯莱-哈密尔顿定理（见习题 2.15）求出 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 来验证其结果。

$$\left(\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}(1-t) & te^{-t} \\ -te^{-t} & e^{-t}(1+t) \end{bmatrix} \right)$$

2.17　对于系统

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

求出特征值和特征向量矩阵 $\boldsymbol{W}$。如果

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

求出 $\boldsymbol{d}(0)$，且判定在典型系统中产生哪些振型。画一个三维的简图来表明由特征向量分量如何得到 $\boldsymbol{x}(0)$。画简图时，通常取 x_3 为垂直线，x_1 在水平线下方左边 45°，x_2 在水平线下方右边 45°。

参照简图，说明沿 x_3 仅出现一个振型。

$$\left(\lambda = -1, -1, -2;\ \boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{d}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

2.18　运用凯莱-哈密尔顿定理，求出习题 2.17 的 b_0，b_1 及 b_2，并且验证，对于习题 2.17 的 $\boldsymbol{x}(0)$，所得的 $\boldsymbol{x}(t)$ 与由习题 2.17 的典型系统的振型和特征向量所求得的 $\boldsymbol{x}(t)$ 相同。

$$\left(\begin{matrix} b_0 = e^{-2t} + 2te^{-t};\ b_1 = 3te^{-t} - 2e^{-t} + 2e^{-2t}; \\ b_2 = te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t} \end{matrix} \right)$$

第三章　传递函数的状态变量描述

在一般系统的分析中，传递函数是重要的，它本质上是研究系统输入-输出之间的关系，而且通常是研究单输入和单输出的关系。状态变量分析也是研究输入-输出之间的关系，但它使系统内部结构更加明了，而用传递函数是做不到这一点的。但是，用传递函数方法已实现了许多简单的闭环系统设计，因此建立开环和闭环系统的传递函数和状态变量描述之间的联系，并且把它推广到常规的补偿方法去是很重要的。

3.1　传递函数的描述

任何写成 s 多项式之比的传递函数 $T(s)$ 都可以整理为一般形式

$$T(s)=\frac{c_m s^m+c_{m-1}s^{m-1}+\cdots+c_1 s+c_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=\frac{N(s)}{D(s)} \quad (3.1)$$

其中，$N(s)$ 和 $D(s)$ 给出了传递函数的零点和极点。$T(s)$ 具有用 n 个积分器描述的方块图，如图 3.1 (a) 所示。极点由反馈部分产生。此方块图是同伴形的，有如下的关系式：

$$\frac{x_1}{u}(s)=\frac{1}{D(s)};\ \frac{x_2}{u}(s)=\frac{s}{D(s)};\ \cdots;\ \frac{x_n}{u}(s)=\frac{s^{n-1}}{D(s)} \quad (3.2)$$

在式 (3.1) 中，分子是系统状态经过加权的和，而零点是由几条并行输出通道的相消作用而产生的。当 $N(s)$ 和 $D(s)$ 有共同因式时，牵涉到在第五章所论述的能控性和能观测性的概念，因此这里暂且假设 $N(s)$ 和 $D(s)$ 没有共同因式。如果 $m<n$，那末

$$T(\infty) \to 0$$

此传递函数称为**真分式**. 如果 $m = n$，可把传递函数分成

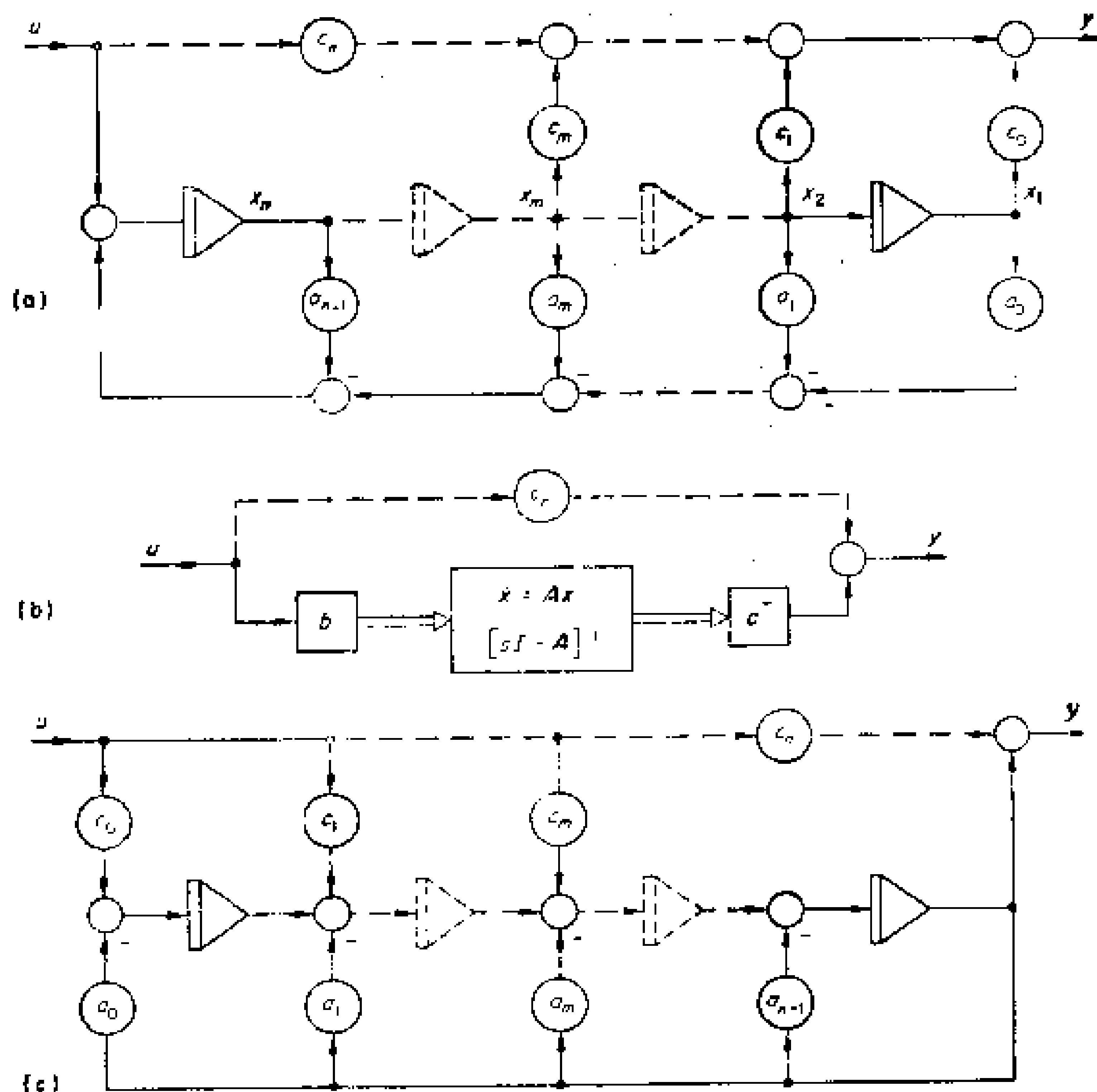


图 3.1 传递函数：(a) 图解形式；(b) 状态变量描述；(c) 转置后的描述

$$T(s) = c_n + \frac{N_1(s)}{D(s)} \tag{3.3}$$

这说明有一条从 u 到 y 的附加的直接通道 c_n.

图 3.1 (a) 系统的状态变量描述是

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u \\ y &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + c_n u \end{aligned} \tag{3.4}$$

上式与图 3.1 (b) 对应，对现在的例子(假设 $m < n$) 是

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{n-1} \end{bmatrix};
$$

$$
\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{c}^T=[c_0 \cdots c_m \cdots 0] \tag{3.5}
$$

在 s 域内，由式(3.5)得

$$
\begin{aligned} \boldsymbol{x}(s) &= [s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{b}u(s) \\ y(s) &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(s) \end{aligned} \tag{3.6}
$$

由于 $u(s)$ 和 $y(s)$ 都是单变量，所以传递函数可以写成

$$
\frac{y}{u}(s)=\boldsymbol{c}^T[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{b} \tag{3.7}
$$

这个形式给出了单输入、单输出传递函数一般的状态变量描述，但具体的描述并不是唯一的，因为原则上可能有无限多组 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}^T$，它们都给出同样的传递函数． 作为一个特殊的例子，可以把式(3.5)转置，得到

$$
\frac{y}{u}(s)=\boldsymbol{b}^T[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^T]^{-1}\boldsymbol{c} \tag{3.8}
$$

在上式中，

$$
\boldsymbol{A}^T=\begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix};\ \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix} c_0 \\ \cdot \\ c_m \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{b}^T=[0 \cdots 1] \tag{3.9}
$$

该式与图 3.1 (c) 对应．事实上，可以用普通的方块图变换来实现图 3.1 (a) 和 3.1 (c) 两种图形之间的变换． 在两种情况下，都是

由于并行通道间的相消产生了零点，它们存在于图 3.1 (a) 的输出通道和图 3.1 (c) 的输入通道. 从能控性和能观测性的意义上说，式 (3.5) 和图 3.1 (a) 的形式，以及它的转置形式式 (3.9) 和图 3.1 (c) 都是重要的，它们分别是能控的和能观测的典型形式(见第 5.4 节末). 作为一个例子，如果

$$\frac{y}{u}(s) = \frac{s^2 + 4s + 5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \tag{3.10}$$

那末

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{c}^T = [5\ \ 4\ \ 1] \tag{3.11}$$

而

$$\frac{y}{u}(s) = \frac{[5\ \ 4\ \ 1]}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & s \\ \cdot & \cdot & s^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{s^2 + 4s + 5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \tag{3.12}$$

由于 $\boldsymbol{b}$ 只有一个非零元素，所以上面仅需要决定式子 $[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}$ 中的最后一列. 建议读者推导式 (3.11) 的转置形式，正如式 (3.8) 和 (3.9) 那样，并且核对得到的结果是否和上面的相同.

部分分式形式

同伴形描述的方便在于可以直接从 $T(s)$ 写出所有的元素，但是可能有许多其他的描述形式(见 Chen Chih-Fan and Haas, 1968 或 Desoer 1970). 考虑式 (3.7) 的另一种形式，可以得到众所周知的部分分式展开式

$$T(s) = \frac{r_1}{(s - \lambda_1)} + \frac{r_2}{(s - \lambda_2)} + \cdots + \frac{r_n}{(s - \lambda_n)} \tag{3.13}$$

如果用典型系统来描述式 (3.7)，使

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{W}^{-1}$$

则得到

$$\frac{y}{u}(s) = c^T[sI - W\Lambda W^{-1}]^{-1}b \qquad (3.14)$$

展开上式得

$$\frac{y}{u}(s) = c^T W[sI - \Lambda]^{-1} W^{-1} b$$

$$= c^T W \begin{bmatrix} \frac{1}{s-\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{s-\lambda_n} \end{bmatrix} W^{-1} b \qquad (3.15)$$

用矩阵代数或者像图 3.2(a) 和 3.2(b) 那样用方块图变换可以得到式 (3.15) 的结果，图中把 W 和 W^{-1} 从反馈通道移到前向通道，而

$$W^{-1}[I/s]W = I/s$$

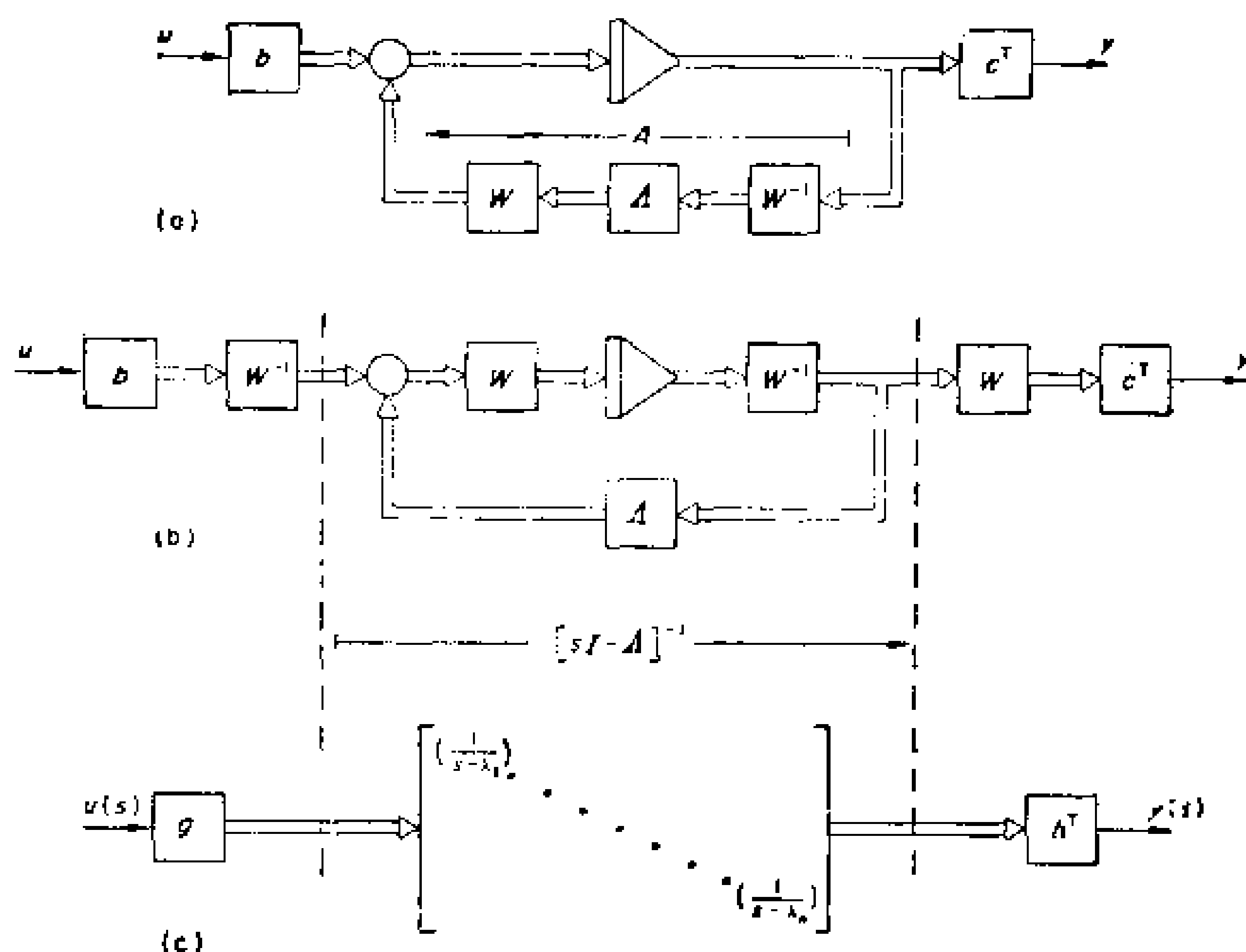


图 3.2　部分分式展开式：(a) 对角线系统的引进；(b) 附加的变换；(c) 部分分式形式

最后，由于 $c^T W$ 和 $W^{-1}b$ 分别是行和列向量，

$$\mathbf{c}^T\boldsymbol{W} = \boldsymbol{h}^T = [h_1h_2\cdots h_n]; \quad \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_n \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

所以传递函数可表示为

$$\frac{y}{u}(s) = \boldsymbol{h}^T\boldsymbol{\Lambda}(s)\boldsymbol{g} \tag{3.17}$$

上式中，$\boldsymbol{\Lambda}(s)$ 是传递函数的对角线系统，其中每项对应于一个特征值，如图 3.2 (c) 所示．由于 $\boldsymbol{\Lambda}(s)$ 是对角线矩阵，式 (3.17) 可以展开为

$$\frac{y}{u}(s) = \frac{h_1g_1}{(s-\lambda_1)} + \frac{h_2g_2}{(s-\lambda_2)} + \cdots + \frac{h_ng_n}{(s-\lambda_n)} \tag{3.18}$$

上式具有式 (3.13) 的部分分式展开式的形式，其中

$$h_1g_1 = r_1, \quad \cdots, \quad h_ng_n = r_n$$

在这种表示中，任何输入 $u(s)$ 都被转换为信号向量

$$\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{b}u(s) = \boldsymbol{g}u(s) \tag{3.19}$$

该信号向量通到由特征传递函数构成的对角线系统去（其中每一项都与一个特征值有关）． 把对角线系统的输出组合在一起就可得出状态向量 $\boldsymbol{x}(s)$．

$$\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{W}\boldsymbol{\Lambda}(s)\boldsymbol{g}u(s)$$

最后得到

$$y(s) = \mathbf{c}^T\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{h}^T\boldsymbol{\Lambda}(s)\boldsymbol{g}u(s)$$

作为例子，研究式 (3.10) 中的传递函数

$$\frac{y}{u}(s) = \frac{s^2+4s+5}{s^3+6s^2+11s+6}$$

它具有特征值 -1，-2，-3，将它展开为式 (3.15) 的形式

$$\frac{y}{u}(s) = [5 \quad 4 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \times$$

$$
\times\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & & \\ & \dfrac{1}{s+2} & \\ & & \dfrac{1}{s+3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1/2 \\ \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (3.20)
$$

上式中，当 $\boldsymbol{A}$ 是同伴形时，可以立即写出 $\boldsymbol{W}$. 由于 $\boldsymbol{b}$ 仅有一个非零元素，所以只需要写出 $\boldsymbol{W}^{-1}$ 的最后一列. 把式(3.20)写成式(3.17)的形式，

$$
\frac{y}{u}(s) = [2 \;\; 1 \;\; 2]\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & & \\ & \dfrac{1}{s+2} & \\ & & \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ \cdots \end{bmatrix} \qquad (3.21a)
$$

$$\frac{1}{(s-\lambda_j)} \quad 或 \quad \frac{(s-z_j)}{(s-\lambda_j)} \tag{3.23}$$

这些项或者对应着一个极点，或者对应着一个零点极点对. 用图3.3 (a)的方块图可实现极点因式，而零点极点对可以展开为下式，

$$\frac{(s-z_j)}{(s-\lambda_j)} = 1 + \frac{(\lambda_j - z_j)}{(s-\lambda_j)} \tag{3.24}$$

并用图 3.3 (b) 所示的方块图来实现. 这里仍然通过并行通道间的对消来获得零点，但改变 z_j 即可以调整其位置. 由各个部分的串联连接可得到式(3.22)的最终实现.

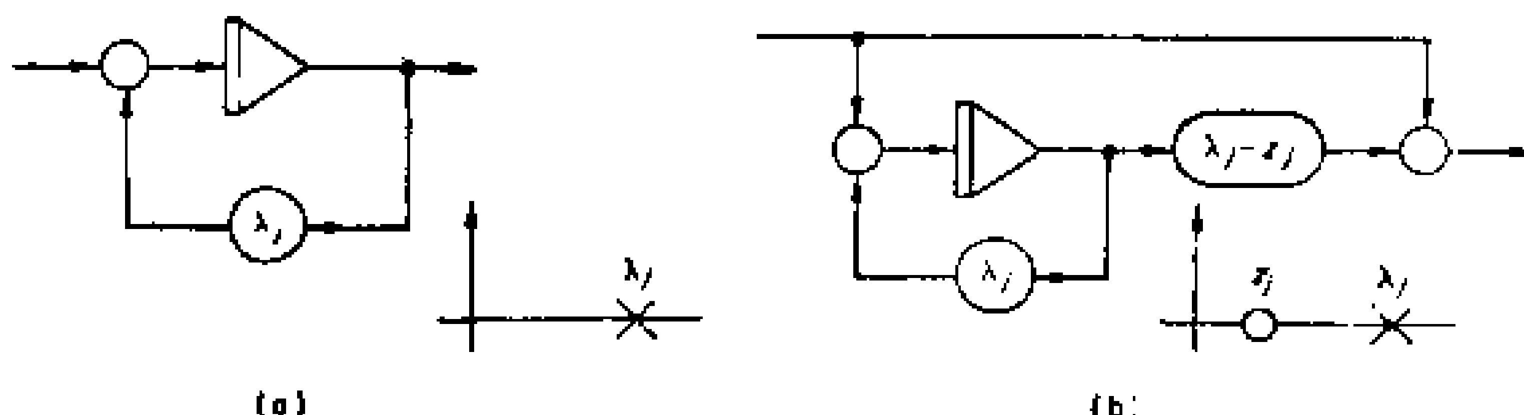


图 3.3 基本传递函数的实现：(a) 极点；(b) 零点极点对

3.2 闭环系统的传递函数

许多闭环系统的描述和设计是用传递函数来进行的. 上述用传递函数来描述状态变量的原理很容易推广到闭环系统中去. 如图 3.4(a) 所示的一个单回路的单位反馈系统*具有图 3.4(b) 的状态变量描述，其前向通道传递函数写成状态变量形式为

$$\frac{y}{u}(s) = KG(s) = \mathbf{c}^T[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_0]^{-1}\boldsymbol{b} \tag{3.25}$$

因此，由下式给出闭环传递函数：

$$\frac{y}{v}(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} = \frac{\mathbf{c}^T[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_0]^{-1}\boldsymbol{b}}{1+\mathbf{c}^T[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_0]^{-1}\boldsymbol{b}} \tag{3.26}$$

* unity-feedback system 指反馈通道传递函数为 1 的系统，见图 3.4(a). 以下均译为单位反馈系统. ——译者注

在许多情况下，上式的 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}^T$ 仅有一个非零元素.

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{c}^T=[1\quad 0\cdots 0]$$

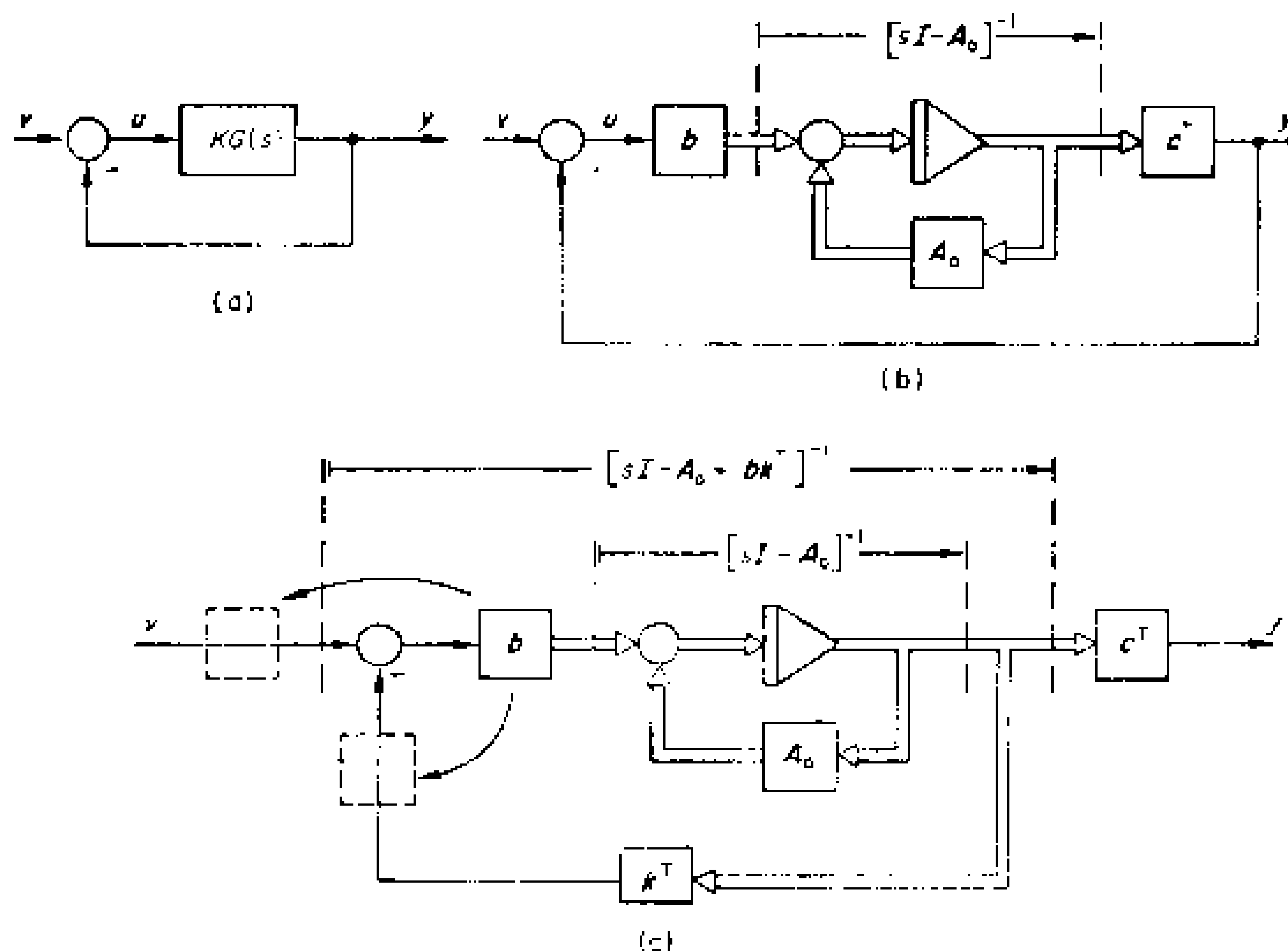


图 3.4　反馈系统描述：(a) 方块图形式；(b) 状态变量形式；(c) 具有一般反馈的状态变量形式

以上假设反馈信号仅仅是输出 $y(=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x})$，但在许多设计中可以从系统状态 $\boldsymbol{k}^T\boldsymbol{x}$ 的不同组合取得反馈信号，如图 3.4 (c)，即

$$u=(v-\boldsymbol{k}^T\boldsymbol{x})$$

其相应的传递函数为

$$\frac{y}{v}(s)=\frac{\boldsymbol{c}^T[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_0]^{-1}\boldsymbol{b}}{1+\boldsymbol{k}^T[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_0]^{-1}\boldsymbol{b}} \tag{3.27}$$

这种状态变量反馈设计的细节将在第四章中讨论. 图3.4(c)的系统具有状态方程：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}[v-\boldsymbol{k}^T\boldsymbol{x}]$$
$$y=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

或者

$$\dot{x} = [\boldsymbol{A}_0 - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T]\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}v = \boldsymbol{A}_c\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}v$$
$$y = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \tag{3.28}$$

上式说明通过 $\boldsymbol{k}^T$ 或 $\boldsymbol{c}^T$ 进行反馈的作用，是从原有的开环矩阵 $\boldsymbol{A}_0$ 中减去(对负反馈)或加上(对正反馈) $\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T$ 或 $\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^T$，从而给出了闭环矩阵 $\boldsymbol{A}_c$.

如果将 $\boldsymbol{b}$ 等效为图 3.4(c) 虚线所示的两个小方块，那么式(3.28)可以用下面的传递函数来表达：

$$\frac{y}{v}(s) = \boldsymbol{c}^T[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T]^{-1}\boldsymbol{b} \tag{3.29}$$

虽然此式在外表上与式(3.27)很不相同，但是它却相当于直接写出的包括了反馈作用的系统方程式. 用矩阵变换的方法可以把式(3.27)和(3.29)联系起来(见第 4.5 节).

对于一个具有从 y 引入负反馈的系统，其闭环极点或特征值可以从下式确定.

$$KG(s) = -1 \quad 或 \quad \boldsymbol{c}^T[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_0]^{-1}\boldsymbol{b} = -1 \tag{3.30a}$$

对状态变量反馈可用下式确定.

$$\boldsymbol{c}^T[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T]^{-1}\boldsymbol{b} = -1 \tag{3.30b}$$

式(3.30)是从一个单变量点处断开系统回路的传递函数. 此式在回路传递函数为 1 时用根轨迹或其他方法可以确定 s 值，但不管用什么分析方法都等效于直接解特征方程，即

$$\det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T] = \det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_c] = 0 \tag{3.31}$$

闭环系统举例

在系统的状态变量描述中，矩阵 $\boldsymbol{A}_0$ 的形式随所给定前向通道的传递函数的形式而定. 对于一个如图 3.5(a) 所示的其前向通道为

$$\frac{K}{s(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$$

的单位反馈系统，以式(3.28)表示的状态变量描述为

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{x} &= \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/\tau_1 & 1/\tau_1 \\ 0 & 0 & -1/\tau_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K/\tau_2 \end{bmatrix} [1 \;\; 0 \;\; 0]\right] x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K/\tau_2 \end{bmatrix} v \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/\tau_1 & 1/\tau_1 \\ -K/\tau_2 & 0 & -1/\tau_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K/\tau_2 \end{bmatrix} v = A_c x + b v \\
y &= [1 \;\; 0 \;\; 0] x
\end{aligned}\right\} \tag{3.32}
$$

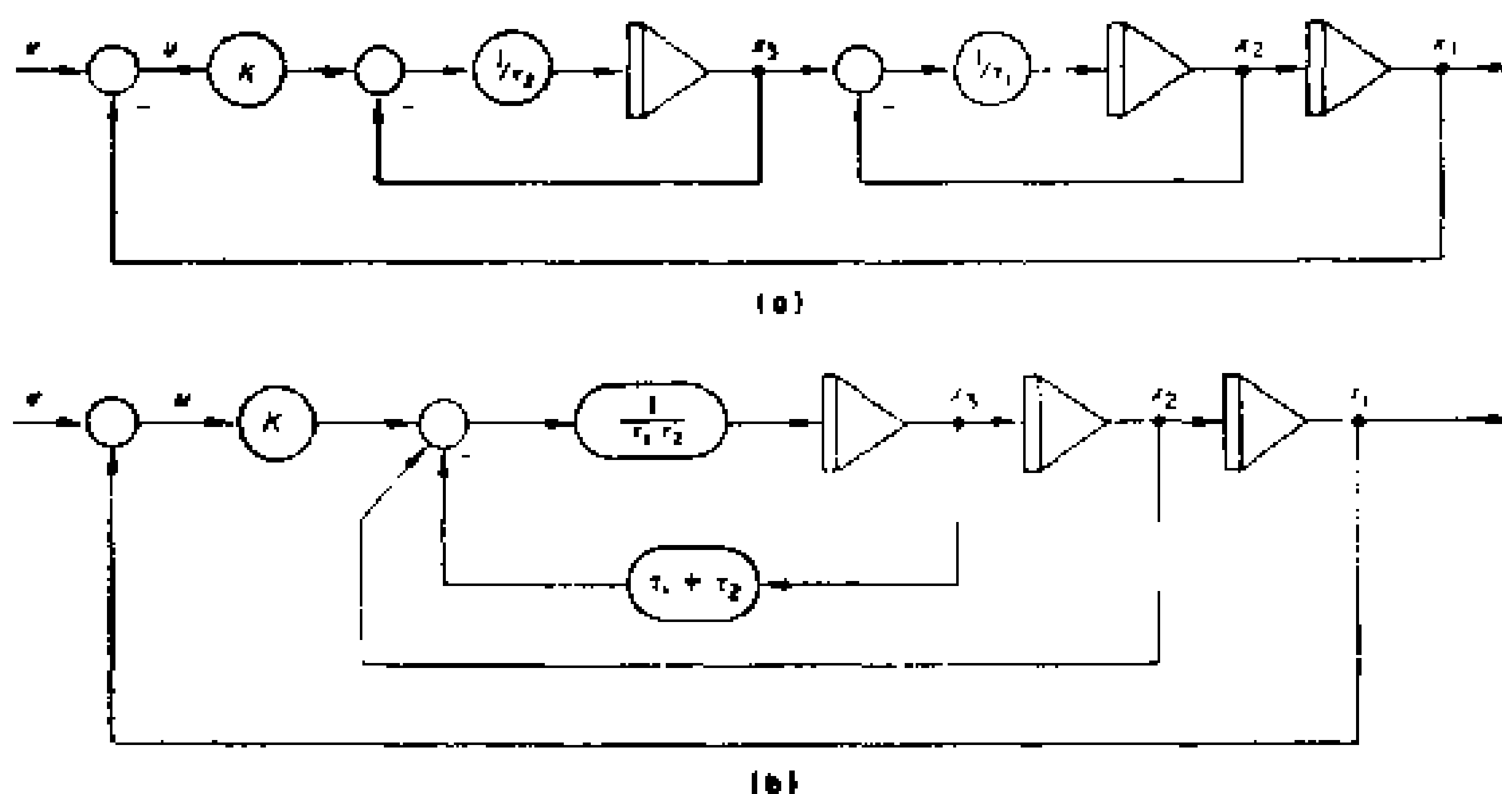


图 3.5　有相同前向通道传递函数的不同描述

如果将前向通道传递函数的因子相乘而变为下面的形式：

$$
\frac{K}{s[s^2\tau_1\tau_2 + s(\tau_1 + \tau_2) + 1]}
$$

则系统具有图 3.5 (b) 的形式，并有

$$
\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K/\tau_1\tau_2 & -1/\tau_1\tau_2 & -(\tau_1 + \tau_2)/\tau_1\tau_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K/\tau_1\tau_2 \end{bmatrix} v \tag{3.33}
$$

最后得到的 $\boldsymbol{A}_c$ 矩阵是不相同的，这主要是由于在传递函数的描述中选择了不同的状态变量，但式(3.32)和式(3.33)的特征方程式都是

$$\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_c]=s^3+\frac{s^2(\tau_1+\tau_2)}{\tau_1\tau_2}+\frac{s}{\tau_1\tau_2}+\frac{K}{\tau_1\tau_2}=0 \quad (3.34)$$

此式本来可由通常的单回路分析得到。如果将式(3.33)表达为式(3.25)形式的传递函数，即

$$\frac{y}{v}(s)=\frac{[1\ \ 0\ \ 0]}{\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_c]}\begin{bmatrix}\cdot & \cdot & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\K/\tau_1\tau_2\end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$=\frac{K}{s^3\tau_1\tau_2+s^2(\tau_1+\tau_2)+s+K}$$

则得到通常的传递函数. 由于 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}^T$ 仅有一个非零元素，所以只需要确定 $[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_c]^{-1}$ 中的一个元素.

一个前向通道具有超前网络的系统，若其传递函数为

$$\frac{y}{u}(s)=\frac{G_0(1+s\tau_c)K}{(1+sG_0\tau_c)s(s\tau+1)} \quad (3.36)$$

则可用图 3.6 来描述，图中采用图 3.3 (b) 的一般形式来描述超前网络. 可以看出它相当于把 u 输入到前向通道的两个点上. 由图可以将状态变量方程写为

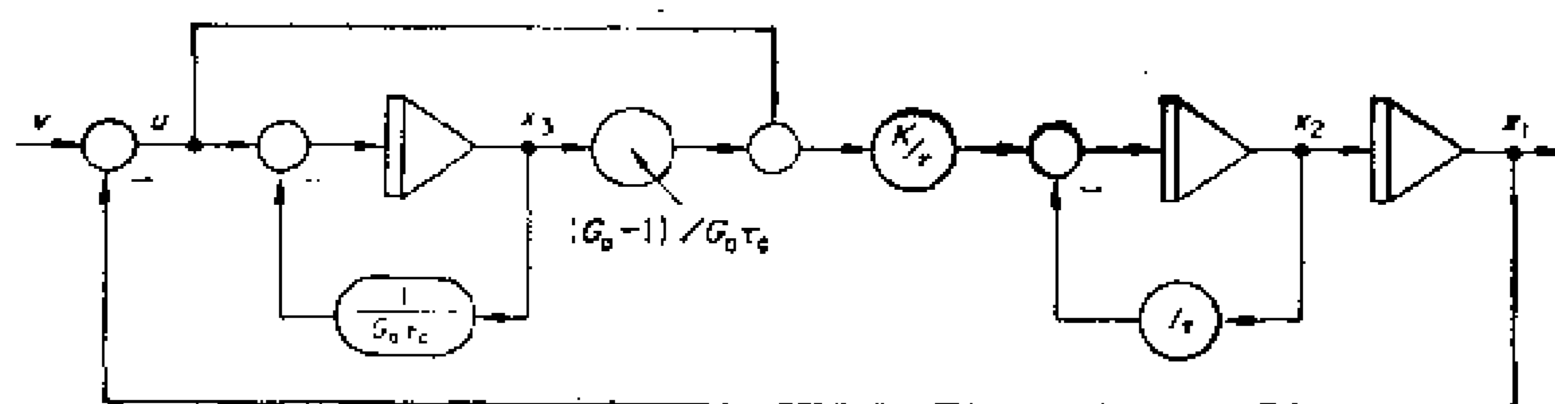


图 3.6 具有超前网络的系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -K/\tau & -1/\tau & K(G_0-1)/G_0\tau\tau_c\\ -1 & 0 & -1/G_0\tau_c\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\K/\tau\\1\end{bmatrix}v \quad (3.37)$$

谐 振 系 统

作为一个比较复杂的例子，我们来研究如图 3.7 (a) 的系统，它是一个理想化的具有惯性 J_m 和粘滞摩擦 F_m 的电机，并通过顺性 G（理想弹簧）与具有惯性 J_0 和粘滞摩擦 F_0 的输出构件相联．为简单起见，假设电动机产生一个与速率无关的转矩 T_m，并假设有一个转矩 T_0 作用于输出端，则可得到下面的方程：

$$T_m = s^2 J_m\theta_m + sF_m\theta_m + G(\theta_m - \theta_0) \tag{3.38a}$$

$$T_0 = s^2 J_0\theta_0 + sF_0\theta_0 + G(\theta_0 - \theta_m) \tag{3.38b}$$

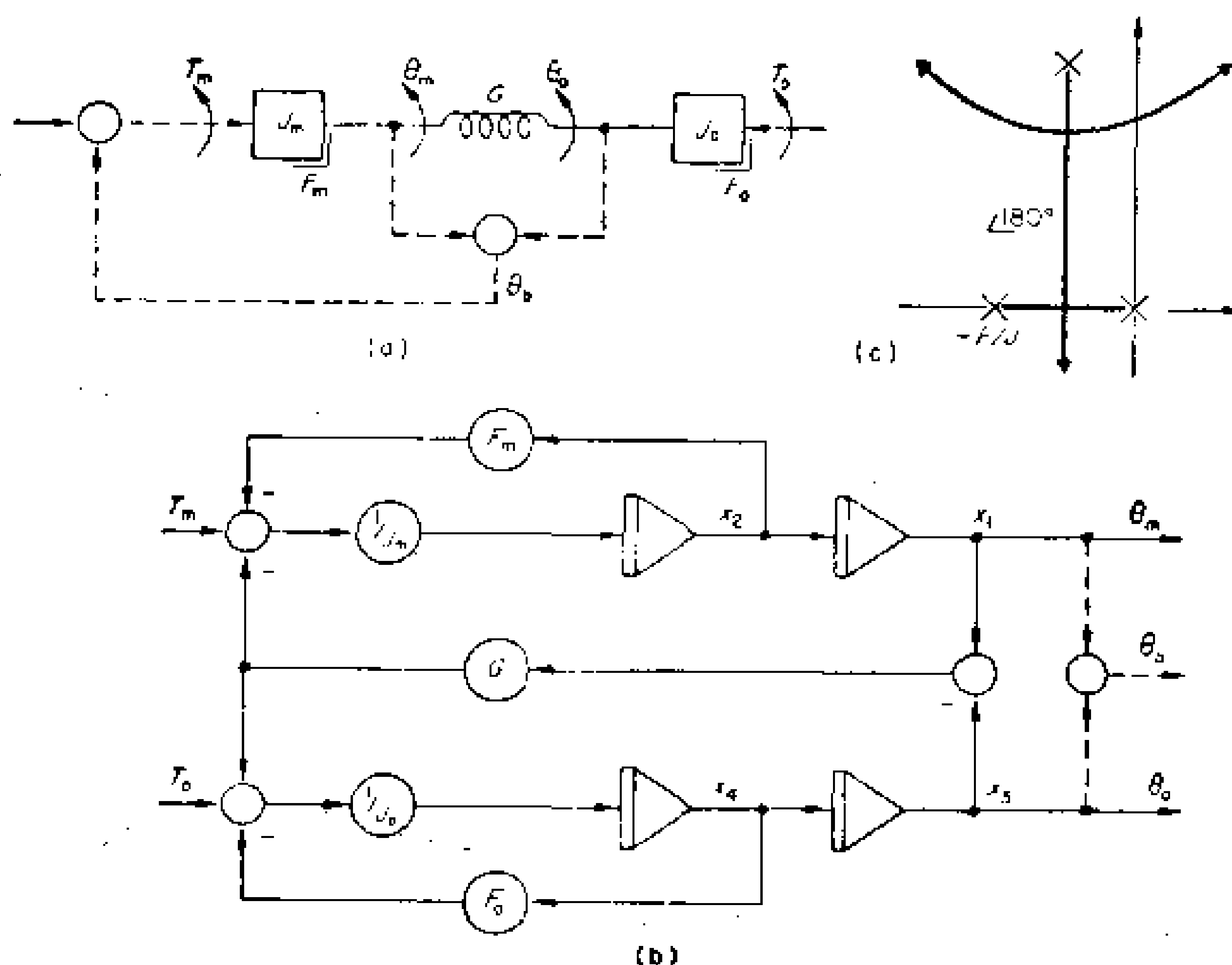


图 3.7　谐振系统：(a) 系统；(b) 图形；(c) s 平面图

上式可以用图 3.7 说明，而状态向量描述为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -G/J_m & -F_m/J_m & G/J_m & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ G/J_0 & 0 & -G/J_0 & -F_0/J_0 \end{array}\right]\boldsymbol{x}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/J_m & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \\ 0 & 1/J_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_m \\ T_0 \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

$\boldsymbol{A}$ 矩阵的形式表明存在两个二阶系统 (x_1, x_2) 和 (x_3, x_4)，它们通过顺性连接 a_{23}，a_{41} 而相互耦合. 为了得到某一个具体的传递函数，仅仅需要确定式子 $[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}$ 中所需的那个具体元素，例如

$$\frac{\theta_0}{T_m}(s)=\frac{[0010]}{\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]}\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & * & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1/J_m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

上式中 * 元素就是所需的唯一元素. 为了简便起见，设

$$J_m=J_0=J,\quad F_m=F_0=F$$

则可验证下式

$$\frac{\theta_0}{T_m}(s)=\frac{G}{s\{s^3J^2+2s^2FJ+s(F^2+2GJ)+2FG\}} \tag{3.41}$$

它具有图 3.7 (c) 所示的极点图. 系统有一个衰减振荡的振型，其中 θ_m 和 θ_0 摆动幅度相同而方向相反. 系统还有一个指数振型，对应于 θ_m 和 θ_0，两者具有相同的初始角和初始速率，因而弹簧(即顺性 G) 不会受到扭转，运动按指数律衰减. 在原点处有极点表明，如果(没有反馈) θ_m 和 θ_0 两者具有相同的值且速度为零，则系统保持静止，也就是说，并不自然地回到特定的位置. 这可以从图 3.7(b) 看出，θ_m 和 θ_0 作用于 G 时以相反的符号组合起来，相同的值就互相抵消了.

系统的矩阵不是满秩的，因为由式 (3.39) 可见

$$\text{col}3^* = -\text{col}1$$

这表明在原点处有极点(零特征值)，见附录 2. 另一方面，式 (3.39) 可以写为

---

* col 为“列”的简写. ——译者注

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -G/J_m & -F_m/J_m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ G/J_m & 0 & -F_0/J_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{3.42a}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -G/J_m & -F_m/J_m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ G/J_m & 0 & -F_0/J_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1 - x_3) \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{3.42b}$$

这表明 x_1 和 x_3 并不是真正的独立状态，这是由于它们的原点是随意的，并且仅能测出差值 $(x_1 - x_3)$ 或 $(\theta_m - \theta_0)$.

如果想对整个系统施加反馈以便对 θ_0 进行定位控制，则这样的控制条件是困难的，因为图 3.7(c) 中的 180° 线与虚轴相交，闭环系统的稳定性就很差．一种可能的方法是取反馈信号 θ_b 为

$$\theta_b = \theta_m + \theta_0$$

对 θ_m 的传递函数可以求得为

$$\frac{\theta_m}{T_m}(s) = \frac{s^2J + sF + G}{s\{s^3J^2 + 2s^2FJ + s(F^2 + 2GJ) + 2FG\}} \tag{3.43}$$

上式中有零点，这是由于输出构件与顺性连接间的谐振形成了“低阻抗”(这意味着在 θ_m 处有小的运动而在 θ_0 处有大的运动)．如果 θ_m 和 θ_0 相加，振荡的振型被抵消，从而得出

$$\frac{\theta_b}{T_m}(s) = \frac{1}{s(sJ + F)} \tag{3.44}$$

当然，上式大大简化了闭环系统的稳定性问题．这种安排有时称分**分隔复位**，其含意是反馈或复位信号是从输出系统的两部分取得的．不过，这并不是全然令人满意的情况，因为谐振振型有可能被加在输出构件上的外部扰动转矩 T_0 所激发，以致产生一个较大的摇摆运动，而由于在反馈通道中谐振振型相消，此摇摆运动不会被电机所克服．更好的解决方法是这样来安排反馈，使闭环极点具有比开环极点更大的阻尼．这需要应用状态变量反馈(参看第四章)．

本例说明了传递函数并不一定给出有关系统的全部信息，因为式(3.44)没有指明系统是否含有谐振振型．用状态变量的术语来说，谐振振型是**不能观测的**，因为它并不出现在式(3.44)的传递函数所规定的输入-输出关系中，而输入转矩 T_0 却可以在系统中激发此谐振振型．另外也可能有一种振型，也可以出现在传递函数的输出端，而又不可能由作用于传递函数输入端的任何信号所激发．但是它可以从一些其它输入端激发．这样的振型称为从传递函数的输入端**不能控的**．这些概念将在下面第五章详细讨论．

3.3 多变量传递函数

所有以前讨论过的传递函数都是单输入单输出的，但许多系统具有多个输入量 $u_1, \cdots, u_n$ 和输出量 $y_1, \cdots, y_n$，因而要用传递函数矩阵来描述这些系统．

$$\boldsymbol{y}(s)=\begin{bmatrix} y_1(s) \\ \vdots \\ y_n(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t_{11}(s)\cdots t_{1n}(s) \\ \vdots \qquad \vdots \\ t_{n1}(s)\cdots t_{nn}(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(s) \\ \vdots \\ u_n(s) \end{bmatrix}=\boldsymbol{T}(s)\boldsymbol{u}(s)$$

上式中 $t_{11}(s), \cdots, t_{nn}(s)$ 是各个单输入单输出的传递函数．传递函数矩阵在多变量控制系统设计中有显著的重要性，对我们来说，重要的是要能够推广第3.1节所引出的一般概念去分析和描述这样的矩阵，特别是要能够确定可能得到的最简单的描述，这样的描述称为**最小实现**．当需要模拟一个传递函数矩阵时，最小实现可以减少模拟的复杂性，这也同样是重要的．传递函数矩阵的研究涉及到矩阵的**秩**(参看附录2)和在第五章所论述的能控性和能观测性概念．

考虑一个具体的例子，假定需要模拟

$$\boldsymbol{T}(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{2s+5}{s^2+5s+6} & \dfrac{2s^2+7s+7}{s^3+6s^2+11s+6} \\ \dfrac{3s^2+12s+11}{s^3+6s^2+11s+6} & \dfrac{s+1}{s^2+5s+6} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

乍看起来，相应的形式应当如图 3.8 (a) 所示，它需要两个三阶的传递函数 $t_{12}(s)$ 和 $t_{21}(s)$，两个二阶的传递函数 $t_{11}(s)$ 和 $t_{22}(s)$。这里共有十个状态变量，与此对应，需要十个单独的积分器.

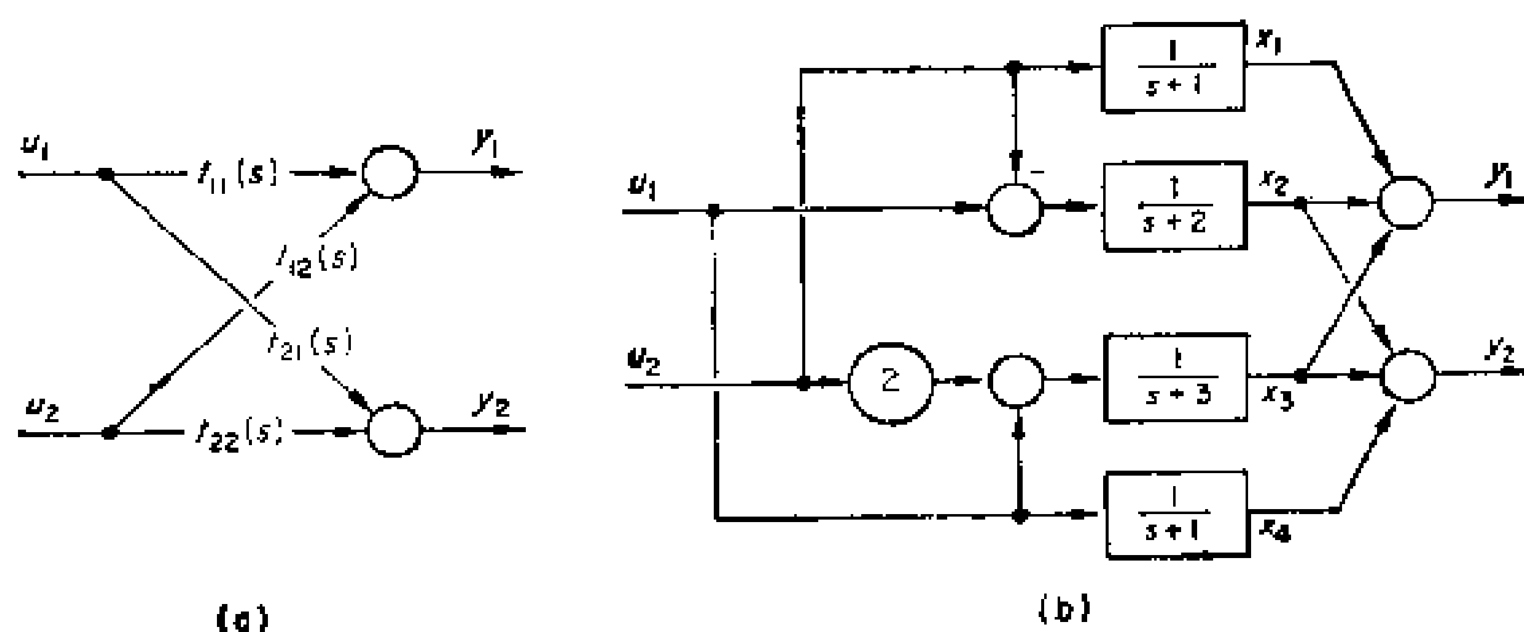


图 3.8 多变量传递函数：(a) 一般形式；(b) 最小实现

将 $\boldsymbol{T}(s)$ 按部分函数展开可得到关于系统的实际复杂性的更多的信息。下式是一般的形式.

$$\boldsymbol{T}(s)=\frac{1}{(s-\lambda_1)}\boldsymbol{R}_1+\frac{1}{(s-\lambda_2)}\boldsymbol{R}_2 +\cdots+\frac{1}{(s-\lambda_m)}\boldsymbol{R}_m \tag{3.46}$$

其中，$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 是各传递函数元素的极点；$\boldsymbol{R}_1, \cdots, \boldsymbol{R}_m$ 是极点的留数矩阵。在留数矩阵 $\boldsymbol{R}_k$ 中，各列 $\boldsymbol{r}_{k1}, \cdots, \boldsymbol{r}_{km}$ 把相应的基本传递函数 $1/s-\lambda_k$ 分配到各个输出端去.

$$\boldsymbol{y}(s)=\cdots+\frac{1}{s-\lambda_k}[\boldsymbol{r}_{k1}\cdots\boldsymbol{r}_{kn}]\begin{bmatrix}u_1(s)\\ \vdots\\ u_n(s)\end{bmatrix}+\cdots \tag{3.47}$$

如果 $\boldsymbol{R}_k$ 是满秩的，将有 n 个独立的列，需要 n 个独立的 $1/(s-\lambda_k)$ 的描述。如果 R_k 不是满秩的，则需要较少的描述，其中每一个 $\frac{1}{(s-\lambda_k)}$ 的描述与独立的列对应.

式 (3.45) 的部分分式展开式为

$$T(s)=\frac{1}{(s+1)}\underset{(R_1)}{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}}+\frac{1}{(s+2)}\underset{(R_2)}{\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}}$$

$$+\frac{1}{(s+3)}\underset{(R_3)}{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}} \tag{3.48}$$

上式中 $\boldsymbol{R}_1$ 是满秩的，但 $\boldsymbol{R}_2$ 和 $\boldsymbol{R}_3$ 的秩为 1. 因此 $\boldsymbol{T}(s)$ 可表示为

$$T(s)=\frac{1}{(s+1)}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{(s+2)}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}[1 \quad -1]$$

$$+\frac{1}{(s+3)}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}[1 \quad 2] \tag{3.49}$$

得到图 3.8(b) 的描述. 这个描述仅包含有四个状态变量 $x_1,\cdots,x_4$，状态向量的描述可以直接写为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}&=\begin{bmatrix}-1 & & & \\ & -2 & & \\ & & -3 & \\ & & & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}&=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{aligned}\right\} \tag{3.50}$$

如果实现的状态变量数目比原来的减少了——本例中由十减少到四，这意味着减少后的状态变量描述了系统的能控与能观测部分；这是用传递函数所能描述的部分，因为传递函数本质上描述了由于输入而产生的输出响应. 如果用一个 10×10 的 $\boldsymbol{A}$ 矩阵来描述式(3.45)，按照上述准则，应该有六个状态是不能控或不能观测的.

举一个比较简单的例子，如果

$$T(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{3}{s+2}\\ \dfrac{2}{s+1} & \dfrac{1}{s+2}\end{bmatrix} \tag{3.51}$$

它有四个状态变量(看图 3.9 (a)),部分分式展开式为

$$T(s)=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\frac{1}{(s+1)}[1\ \ 0]+\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\frac{1}{(s+2)}[0\ \ 1] \quad (3.52)$$

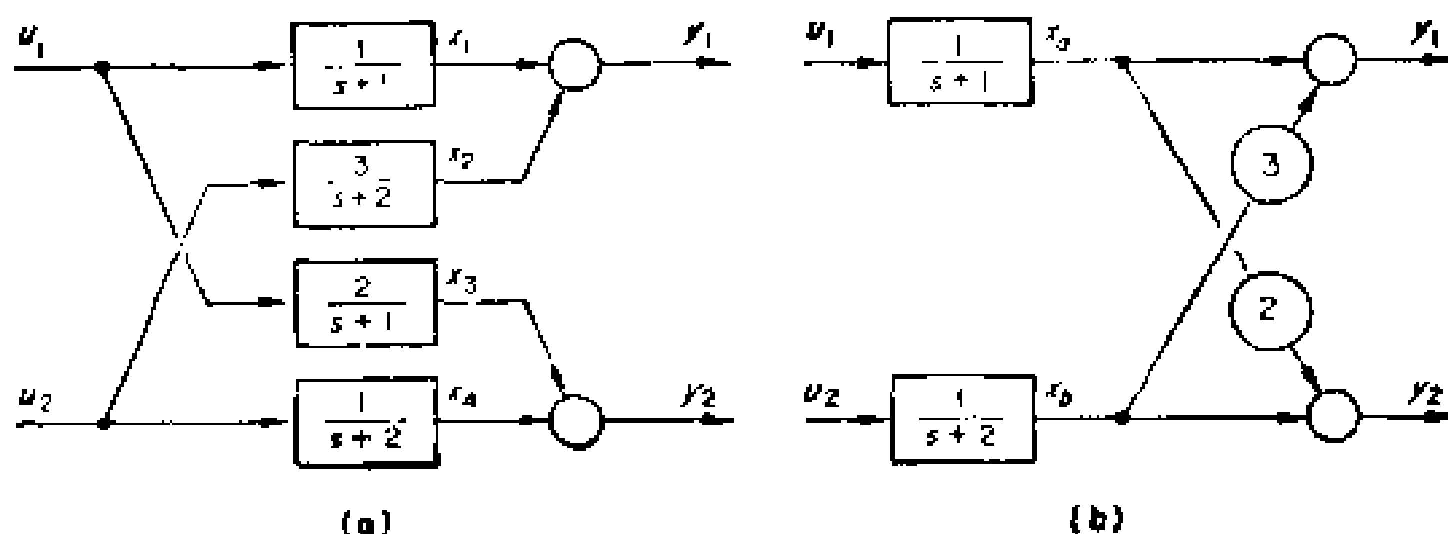


图 3.9　最小实现:(a) 系统;(b) 降阶实现

传递函数的实现只有两个状态 x_a 和 x_b. 这种情况的出现是因为 u_1 到 x_1 和 x_3 的传递函数是相同的,即 $1/(s+1)$,仅增益不同. 因此 u_1 不能独立地控制 x_1 和 x_3. 任何在 u_1 处的输入仅能使 $x_3=2x_1$. 对 x_2 和 x_4 也出现类似的情况. 然而,各自不同的初始状态却能够分别加在 x_1 和 x_3 上,并会在输出端给出不同的响应. 因此这个系统是能观测的,但是不能控. 经过简单的方块图变换,即把 $1/(s+1)$ 和 $1/(s+2)$ 移到左边,使各自消去一个状态变量,就可把图 3.9 (a) 变为图 3.9 (b). 图 3.9 (a) 的状态方程是

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=\begin{bmatrix}-1&&&\\&-2&&\\&&-1&\\&&&-2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1&0\\0&3\\2&0\\0&1\end{bmatrix}u\\ y&=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}x\end{aligned}\right\} \quad (3.53)$$

如果用如下的正式判据来检验能控性和能观测性,可以求出 P 的秩为 2,而 Q 的秩为 4.

$$P=[B\ \ AB\ \ A^2B\ \ A^3B];\quad Q=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\\CA^3\end{bmatrix}$$

上面的例子具体地说明了基本的手法，即先做部分分式展开，然后检查其留数矩阵的秩.

以上所讨论的传递函数全都具有真分式的形式 {当 $s\to\infty$，$\boldsymbol{T}(s)\to \boldsymbol{0}$}，但如果 $\boldsymbol{T}(s)$ 中任何元素的分子和分母的次数相同，则部分分式展开式就包含有一个常数项，代表从输入到输出的直接通道.

如果

$$\boldsymbol{T}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s^2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)}\\ \dfrac{s}{(s+2)} & \dfrac{2s}{(s+3)}\end{bmatrix}\tag{3.54a}$$

可以把它写成

$$\boldsymbol{T}(s)=\begin{bmatrix}1-\dfrac{3s+2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)}\\ 1-\dfrac{2}{(s+2)} & 2-\dfrac{6}{(s+3)}\end{bmatrix}\tag{3.54b}$$

部分分式展开式为

$$\boldsymbol{T}(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}+\frac{1}{(s+1)}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{(s+2)}\begin{bmatrix}4 & 0\\ -2 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{(s+3)}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -6\end{bmatrix}\tag{3.55a}$$

或者

$$\boldsymbol{T}(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\frac{1}{(s+1)}[-1\ \ 1]+\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}\frac{1}{(s+2)}[2\ \ 0]+\begin{bmatrix}0\\ -6\end{bmatrix}\frac{1}{(s+3)}[0\ \ 1]\tag{3.55b}$$

上式中第一个矩阵给出了从输入到输出的直接通道，如图 3.10 所示.

在状态变量分析中，同一个传递函数可以用许多不同的形式来描述，状态变量的描述提供了关于系统内部特性的附加信息，而

这些附加信息在传递函数中是不明显的（这是由于零点极点相消等原因）．相反，在多变量情况下，用状态变量描述法可得到传递函数的较为简单的实现，它要比最初想象的更为简单．这一章也从方块图推导了控制系统的状态变量描述，但从方块图所能得到的系统特性的直观性在状态变量描述中却消失了．

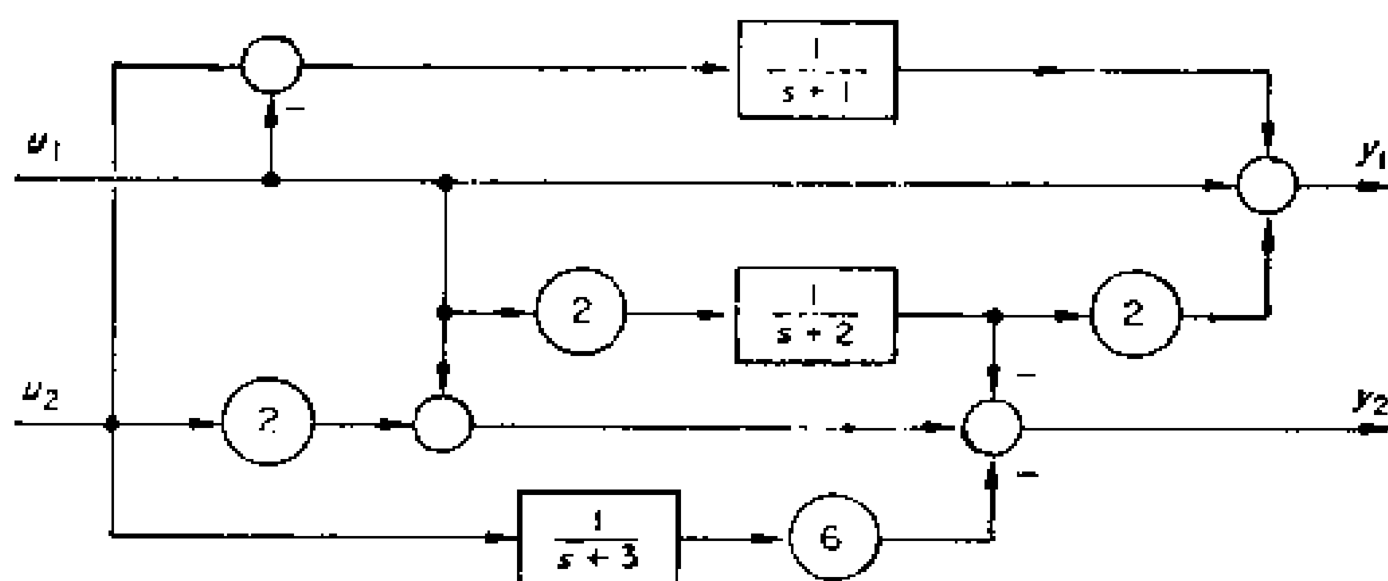


图 3.10 含有从输入到输出直接通道的传递函数的最小实现

参 考 文 献

Chen Chih Fan, and Haas, I. J., *Elements of Control System Analysis* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs N.J., 1968).

Chen, C. T., *Introduction to Linear System Theory* (Holt, Rinehart and Winston, New York, 1970).

Desoer, C. A., *Notes for a Second Course on Linear Systems* (Van Nostrand Reinhold, New York, 1970).

Gupta, S. C., and Hasdorff, L., *Fundamentals of Automatic Control* (Wiley, New York, 1970).

Kuo, B. C., *Automatic Control Systems, 3rd ed.* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1975).

习 题

3.1 试把

$$T(s)=\frac{s^2+2s+5}{s^3+4s^2+9s+10}$$

表示为下面的形式：

$$T(s)=\boldsymbol{c}^T[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{b},\text{ 其中 }\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

A 是同伴形矩阵。试验算由

$$T(s) = b^T[sI - A]^{-1}c$$

可得到原来的传递函数。

3.2　用式子

$$T(s) = c^T W[sI - A]^{-1} W^{-1} b$$

其中

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

把下面的式子表示为部分分式展开式

$$T_1(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2};\quad T_2(s) = \frac{s^2 + 6s + 11}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12}$$

$$T_3(s) = \frac{s^2 + 3s + 3}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2};\quad T_4(s) = \frac{2s^2 + 5s + 7}{s^3 + 3s^2 + 7s + 5}$$

为了确定 W，假设 A 是同伴形式，并设 $T_4(s)$ 的典型系统具有全部实数形式。

3.3　证明传递函数

$$c^T[sI - A]^{-1}b$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -8 & -2 & -3 \\ \text{[illegible]} & & \end{bmatrix};\quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ \text{[illegible]} \end{bmatrix};\quad c^T = [1\ \ 0\ \ 0]$$

$$T(s)=\frac{s+1}{s^2+5s+6}$$

写成状态变量的描述形式

$$T(s)=\boldsymbol{c}^T[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{b}$$

当

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$$

时确定 $\boldsymbol{c}^T$ 的元素．又当

$$\boldsymbol{c}^T=[1\ \ 1];\ [1\ \ 2];\ [3\ \ 1]$$

时确定 $\boldsymbol{b}$ 的元素．用下式

$$T(s)=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{W}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda}]^{-1}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{b}$$

检验结果是否正确．

3.6　对图 3.5 的系统，设 $\tau_1=1$，$\tau_2=0.25$，从 $\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_c]=0$ 求取特征方程．确定刚好维持等幅振荡所需要的 K 的值以及特征值．用系统的根轨迹图验算结果．

利用上面所确定的 K 值，以实数形式讨论振荡振型，并且根据观察写出 $\boldsymbol{\Lambda}_r$ 和 $\boldsymbol{W}_r$．求取 $\boldsymbol{W}_r^{-1}$（$1/\det\boldsymbol{W}_r$ 作为公共的外部常数不必求出），并且验算

$$\boldsymbol{\Lambda}_r=\boldsymbol{W}_r^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}_r$$

当单位脉冲作用于 v 时，求出典型系统中相应的初始条件（见附录 1），并利用 $\boldsymbol{W}_r$，直接按部分分式展开式求取传递函数 $x_1/v(s)$，然后取其反变换求取 $x_1(t)$．

$$\{K=5,\lambda=\pm j2,-5;d_2(t)=(20/29)(e^{-5t}$$
$$-\cos 2t+2.5\sin 2t)=x_1(t)\}$$

3.7　对图 3.5 的系统，当引入速度反馈时，有

$$u=(v-x_1-k_1dx_1/dt)$$

试确定它对 $\boldsymbol{A}$ 矩阵的影响

$$(a_{22}=-kk_1/\tau_2)$$

3.8　一个前向通道传递函数为

$$\frac{x_1}{u}(s)=\frac{K}{s(1+s\tau)}$$

的系统，具有单位反馈并且通过高通滤波器加入速度反馈（也就是加速度或瞬时速度反馈），即

$$u=v-\left(1+\frac{s^2k_1\tau_b}{1+s\tau_b}\right)$$

试求取矩阵 $\boldsymbol{A}$. 应注意，现在有一个与反馈通道有关的状态变量 (x_3). 验证由

$$\det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}] = 0$$

可得到用通常的单回路分析法所得到的特征方程.

$$\{s^3\tau_1\tau_b + s^2(\tau_1 + \tau_b(1 + Kk_t)) + s(1 + K\tau_b) + K = 0\}$$

3.9　在图 3.11 的系统中，前向通道马达产生一个转矩 $k_t u$，并具有惯量 J_m. 另一惯量 J_0 通过粘性连接 F 与输出轴耦合，F 传递一个转矩

$$T = F(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_0)$$

试画出系统的方块图并求取矩阵 $\boldsymbol{A}$. 由方块图或 $\boldsymbol{A}$ 矩阵说明有一个振型为 $\lambda = 0$，并且由此得到一个 3×3 矩阵，它给出了其余的振型. 由 3×3 矩阵证明

$$\frac{\theta_m}{v}(s) = \frac{K(sJ_0 + F)}{J_m J_0 s^3 + s^2 F(J_m + J_0) + sKJ_0 + KF}$$

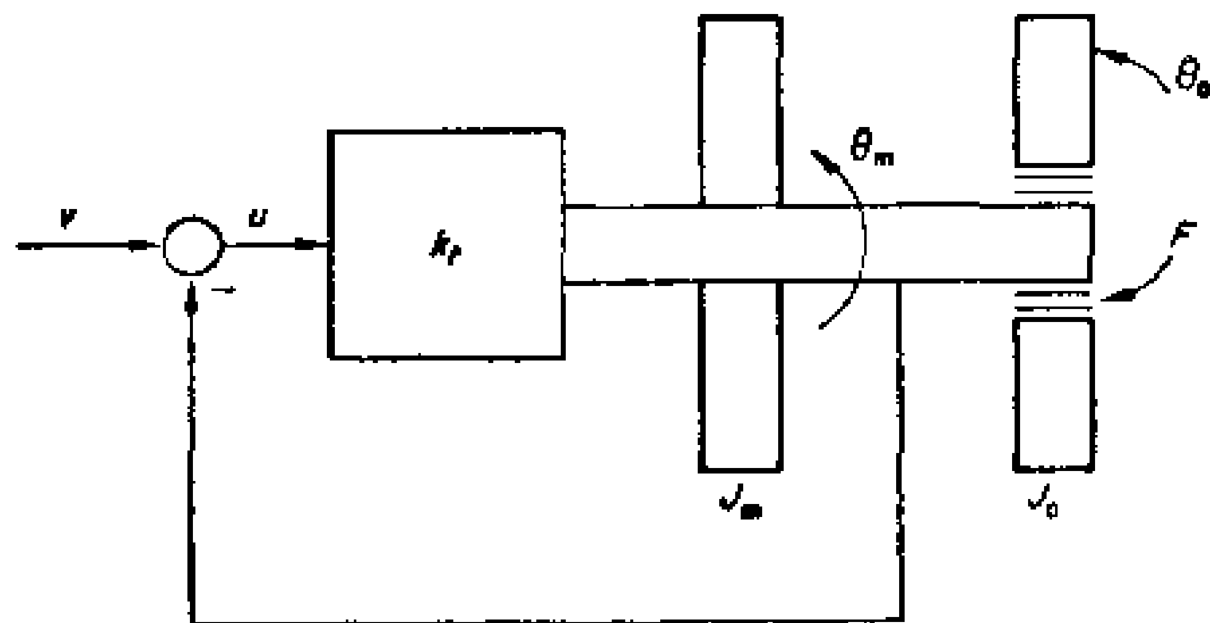


图 3.11　具有粘性连接惯量的系统

3.10　对于一个给定的系统，$\boldsymbol{A}$ 矩阵决定于状态变量的选取，但系统总的传递函数同状态变量的选取无关.

讨论图 3.12 的电路.

(1) 证明

$$\frac{v_2}{v_s}(s) = \frac{1}{s^3 LRC^2 + 2s^2 LC + s(2CR + L/R) + 2}$$

它可由下式描述

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2ab^2 & -s(a+b) & -2a \end{bmatrix};\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2a \end{bmatrix};\ \boldsymbol{c}^T = [1\ \ 0\ \ 0]$$

其中，$a = 1/CR$，$b = R/L$，并画出相应的方块图。

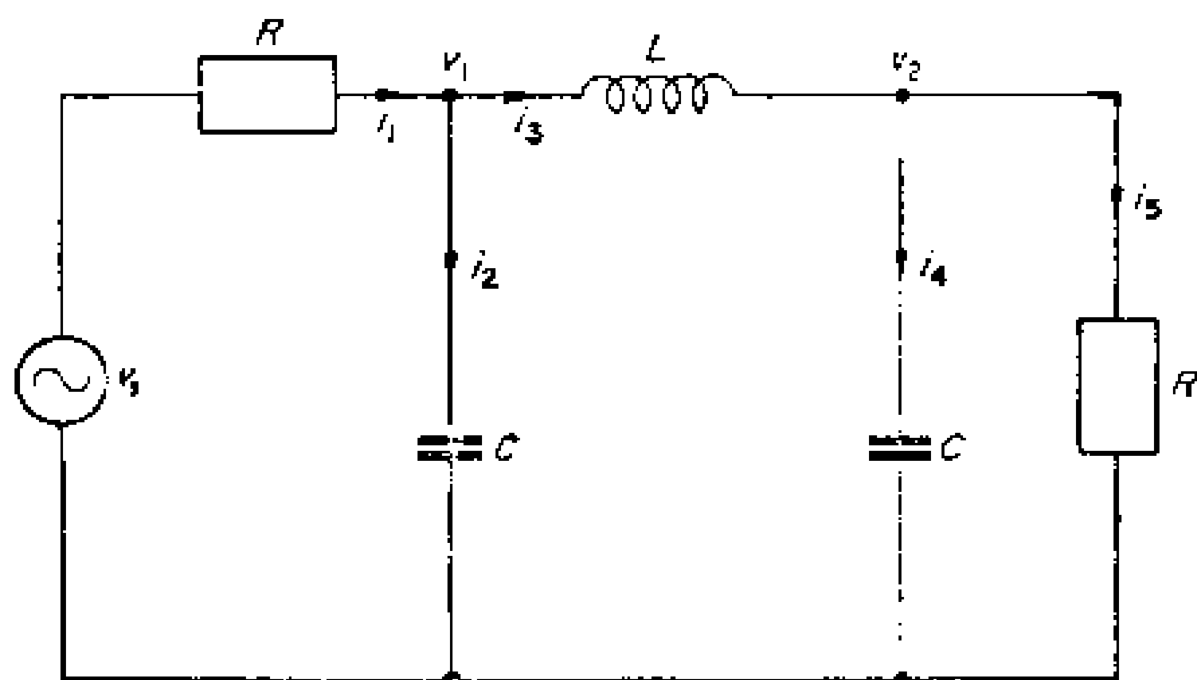


图 3.12 RLC 电路

(2) 利用状态变量

$$x_1 = v_1;\quad x_2 = v_2;\quad x_3 = \int (v_1 - v_2)dt\,(=Li_3)$$

按 v_s，v_1，v_2 写出电路的结点方程。

画出该状态方程的方块图，并证明

$$A_2 = \begin{bmatrix} -a & 0 & -ab \\ 0 & -a & ab \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

用 A_2 求取习题 3.10 (1) 的传递函数。

(3) 用 v_s，v_1，v_2 表达电流方程式

$$i_1 = i_2 + i_4 + i_5$$
$$i_3 = i_4 + i_5$$

并设 $x_1 = v_2$，$x_2 = dv_2/dt$，$x_3 = v_1$，画出状态方程式的方块图，并证明

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -ab & -a & ab \\ -a & -1 & -a \end{bmatrix}$$

用 A_3 求取习题 3.10 (1) 的传递函数。

3.11 求出下列传递函数矩阵的最小实现。

$$T_1(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{3s+4}{s^2+3s+2} & \dfrac{1}{s+2} \\ \dfrac{2s+3}{s^2+3s+2} & \dfrac{3s+4}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}$$

$$
\boldsymbol{T}_2(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{s+2} & \dfrac{1}{s^2+s+1} \\ \dfrac{s^2+2s+2}{s^3+2s^2+2s+1} & \dfrac{s^2+5s+5}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}
$$

$$
\left(
\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_1(s) &= \frac{1}{s+1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{T}_2(s) &= \frac{1}{s^2+s+1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{1}{s+1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{s+2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\right)
$$

第四章　状态变量反馈

为了改善简单系统的性能，例如改进响应速度或减少斜坡跟踪误差等，过去常用的方法是采用无源补偿网络或再加上测速电机反馈(速度反馈). 第三章末尾讨论了这些补偿方法的状态变量描述. 在应用上，某一种方法通常仅着眼于改善系统某一方面的性能,而在别的方面还可能引起有害的影响，如产生附加的极点，或极点向使系统性能恶化的方向移动. 产生这些影响的主要原因是系统中任何变化在一定程度上都会影响到所有的性能. 由状态变量分析概念导出的一些设计方法可以实现对系统性能更好的控制. 本章将讨论这些方法. 虽然这些方法是从状态变量分析中发展而来的，但在应用中却不真正需要状态变量分析的概念. 一种有趣的见解(见 Schultz and Melsa 1967, 第 9.1 节)认为,在状态变量方法出现之前，这些方法中的大多数本来早就应该被采用了.

4.1　状态变量反馈

图 4.1 所示的闭环系统具有由式

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u$$

表示的前向通道，状态变量反馈意味着反馈信号由状态向量乘以 $\boldsymbol{k}^T$ 组成,也就是

$$u = v - \boldsymbol{k}^T\boldsymbol{x} \tag{4.1}$$

闭环方程式是

$$\dot{\boldsymbol{x}} = [\boldsymbol{A}_0 - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T]\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}v \tag{4.2}$$

对应的传递函数为(参看第 3.2 节)

$$T(s) = \frac{y}{v}(s) = \frac{\boldsymbol{c}^T[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_0]^{-1}\boldsymbol{b}}{1 + \boldsymbol{k}^T[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_0]^{-1}\boldsymbol{b}} \tag{4.3a}$$

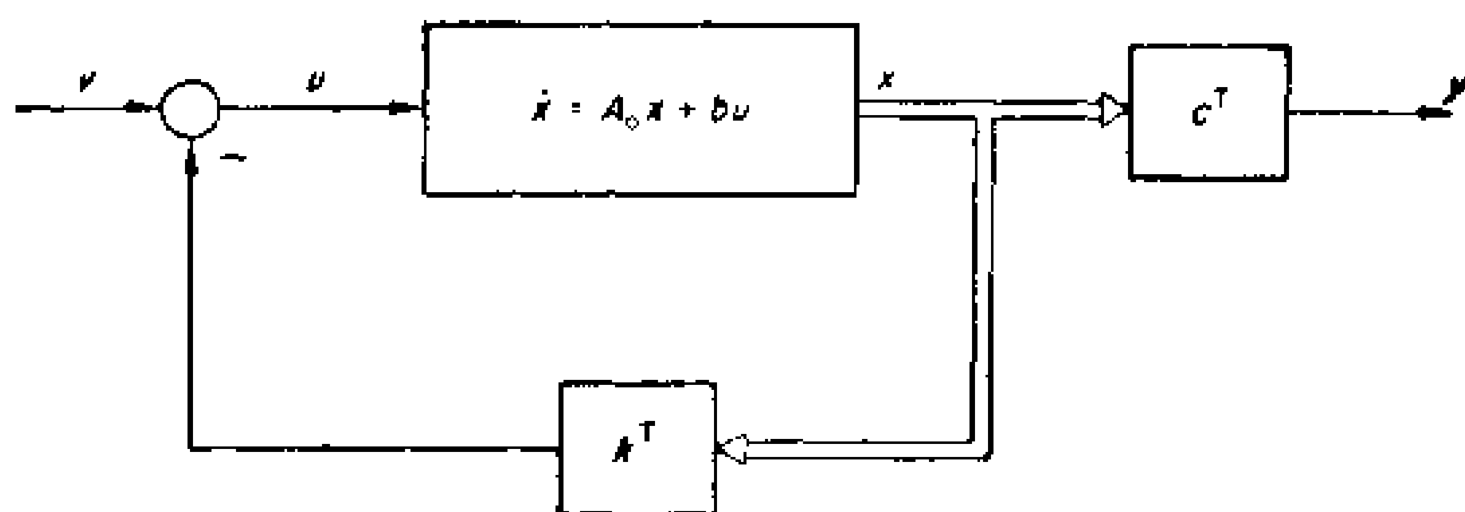


图 4.1 单输入-单输出系统

或

$$T(s) = \frac{y}{v}(s) = \boldsymbol{c}^T[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T]^{-1}\boldsymbol{b} \qquad (4.3b)$$

对于一个 n 维系统，由于 $\boldsymbol{k}^T$ 具有 n 个可任意选择的元素 $k_1, \cdots, k_n$，因而原则上可以调整式 (4.3a) 和式 (4.3b) 的特征方程式

$$1 + \boldsymbol{k}^T[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_0]^{-1}\boldsymbol{b} = 0 \qquad (4.4a)$$

或

$$\det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T] = 0 \qquad (4.4b)$$

的系数，以得到任何指定的特征值．式 (4.3a) 和式 (4.3b) 以及式 (4.4a) 和式 (4.4b) 之间的不同形式可由矩阵变换得到(参看第 4.5 节)．

如果 $\boldsymbol{A}_0$ 是同伴形的，$\boldsymbol{b}$ 是普通的简单形式，

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

则

$$[\boldsymbol{A}_0 - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T] = \boldsymbol{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_{n1} - k_1) & & & (a_{nn} - k_n) \end{bmatrix} \qquad (4.5)$$

式中，$\boldsymbol{A}_c$ 是闭环矩阵．

由矩阵 $\boldsymbol{A}_c$ 的最后一行可以直接写出特征方程式:

$$s^n + (k_n - a_{nn})s^{n-1} + \cdots + (k_1 - a_{n1}) = 0 \tag{4.6}$$

从期望的特征值 λ_k^d 得到的特征方程式是

$$(s - \lambda_1^d)(s - \lambda_2^d)\cdots = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_0 = 0 \tag{4.7}$$

比较两个特征方程式的系数，可直接得到 $k_1, \cdots, k_n$ 的数值. 在更为一般的情况下，$\boldsymbol{A}_0$ 不是同伴形的，或 $\boldsymbol{b}$ 有多个元素，则必须由式(4.4a)的展开式得到特征方程,然后再比较其系数. 对于简单的一般情况，

$$\boldsymbol{A}_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix};\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{k}^T = [k_1 k_2] \tag{4.8}$$

求得特征方程式为

$$s^2 + s\{b_1k_1 + b_2k_2 - (a_{11} + a_{22})\} + (b_1k_1 - a_{11}) \times (b_2k_2 - a_{22}) - (b_2k_1 - a_{21})(b_1k_2 - a_{12}) = 0 \tag{4.9}$$

由于矩阵有两个特征值，仅需要两个可调参数就可得到任何特征值，而系统中有四个量可以利用,即 b_1，b_2，k_1，k_2. 因此可以有许多种组合,且某些参数可以令其等于零. 但在实际情况下,其中某些参数可能是固定的，而另一些参数则可能意味着不能实现的连结,从而大大地限制了选择的范围. 例如,式(4.8)中的 b_2 表示系统前向通道中通常的误差输入，而 b_1 表示系统中另一点上能影响输出的输入,事实上，b_1 表示的输入不一定是可能的.

假定图 4.2(a)的系统应用状态变量反馈,其前向通道传递函数为

$$\frac{x_1}{u}(s) = KG(s) = \frac{1}{s(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)} \tag{4.10}$$

这里假定 K 等于1. 得到的闭环矩阵是

$$\boldsymbol{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/\tau_1 & 1/\tau_1 \\ 0 & 0 & -1/\tau_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/\tau_2 \end{bmatrix}[k_1\ k_2\ k_3] \tag{4.11}$$

由 $\boldsymbol{A}_c$ 可求出系统的特征方程为

$$s^3\tau_1\tau_2 + s^2\{\tau_1 + \tau_1(1 + k_3)\} + s(1 + k_2 + k_3) + k_1 = 0 \tag{4.12}$$

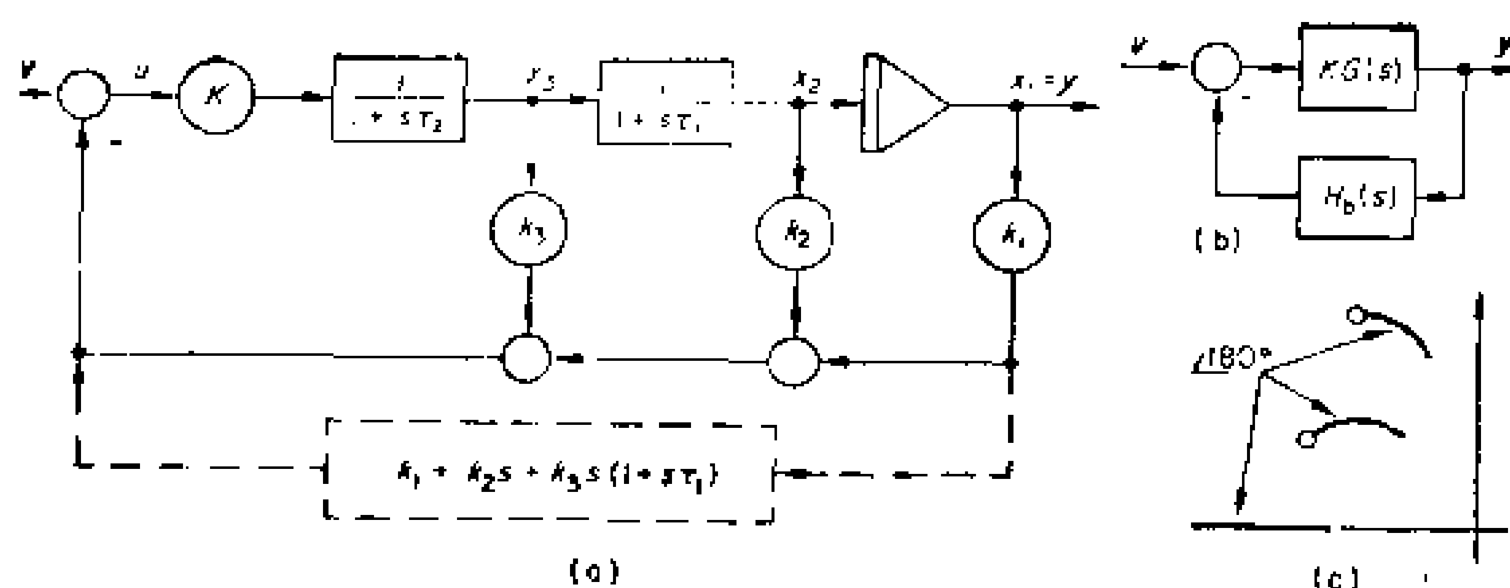


图 4.2 状态变量反馈：(a) 等效反馈通道；(b) 方块图表示法；(c) 反馈通道的零点

设 $\tau_1 = 1$，$\tau_2 = 0.2$，则

$$KG(s) = \frac{5}{s(s+1)(s+5)} \tag{4.13}$$

其特征方程式为

$$s^3 + (6 + 5k_3)s^2 + 5(1 + k_2 + k_3)s + 5k_1 = 0 \tag{4.14}$$

如果要求闭环极点在(例如) $\lambda = -1 \pm j2$，-10 处，则希望特征方程为

$$s^3 + 12s^2 + 25s + 50 = 0 \tag{4.15}$$

比较式(4.14)和式(4.15)的系数，可得

$$5k_1 = 50;\ 5(1 + k_2 + k_3) = 25;\ (6 + 5k_3) = 12 \tag{4.16}$$

由此得到

$$k_1 = 10;\ k_2 = 14/5;\ k_3 = 6/5 \tag{4.17}$$

尽管上面的设计满足了极点的条件，但还可能有附加的一般性要求，即系统对单位阶跃输入有一个对应的单位稳态输出*(一类特性)就是要

$$\frac{y}{v}(0) = T(0) = 1$$

而现在的系统有

* 这类系统在本书中称为单位调准 (unity alignment)。——译者注

$$T(0) = k_1 = 10$$

它不能给出单位调准．极点的位置决定于在每个回路中保持正确的增益．如把 $\boldsymbol{k}^T$ 的所有元素除以 k_1，并使前向通道的增益 (K) 为 k_1，则通过所有回路的增益不变，因而系统保持着所要的极点并且有单位调准．这时

$$\boldsymbol{k}^T = [1 \quad 7/25 \quad 3/25]; \quad K = 10 \tag{4.18}$$

系统既满足极点的要求，也满足了单位调准的要求．通常，如果要求单位调准，则 k_1 必须是 1，而极点调整则由余下的 $(n-1)$ 个状态反馈系数和前向通道的增益 k 等 n 个参数来实现．

关于状态变量反馈的另一种有启发性的解释也可用与上述分析不同的方法得到．在这种方法中，反馈信号不是直接从各个状态单独地取出，而原则上可以倒过来从 x_1 算出，对图 4.2 (a) 即是

$$x_2 = sx_1; \quad x_3 = s(s\tau_1 + 1)x_1 \tag{4.19}$$

这时，系统可以表示为如图 4.2 (b) 的单回路形式，反馈通道为

$$H_b(s) = (k_1 + k_2 s + k_3 s(s\tau_1 + 1)) \tag{4.20}$$

而

$$\boldsymbol{k}^T\boldsymbol{x}(s) = H_b(s)x_1(s)$$

此时特征方程式为

$$KG(s)H_b(s) + 1 = 0$$

或写作

$$\frac{k_1 + k_2 s + k_3 s(s\tau_1 + 1)}{s(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)} + 1 = 0 \tag{4.21}$$

由此得到

$$s^3\tau_1\tau_2 + s^2\{\tau_2 + \tau_1(1 + k_3)\} + s(1 + k_2 + k_3) + k_1 = 0 \tag{4.22}$$

此式与由 $\boldsymbol{A}_c$（式 (4.12)）得到的相同．在式 (4.21) 中，整个开环回路传递函数 $KG(s)H_b(s)$ 表明，$H_b(s)$ 有效地引入了 $(n-1)$ 个零点，它们是由 k_1，k_2，k_3 的反馈通道之间的互相对消而产生的．在根轨迹图上，这意味着 $(n-1)$ 条 180° 线起源于 $KG(s)$ 极点而终止于这些零点，参看图 4.2 (c)．如果 K 增大，则闭环极点向零点靠近．如果这些零点极点以及所有根轨迹线都在左半平

面，则对于任意K值，系统都是稳定的．由式(4.18)的数值可得

$$H_b(s) = s^2 + 10s/3 + 25/3 \tag{4.23}$$

零点位于

$$s = 5(-1 \pm j\sqrt{2})/3 \tag{4.24}$$

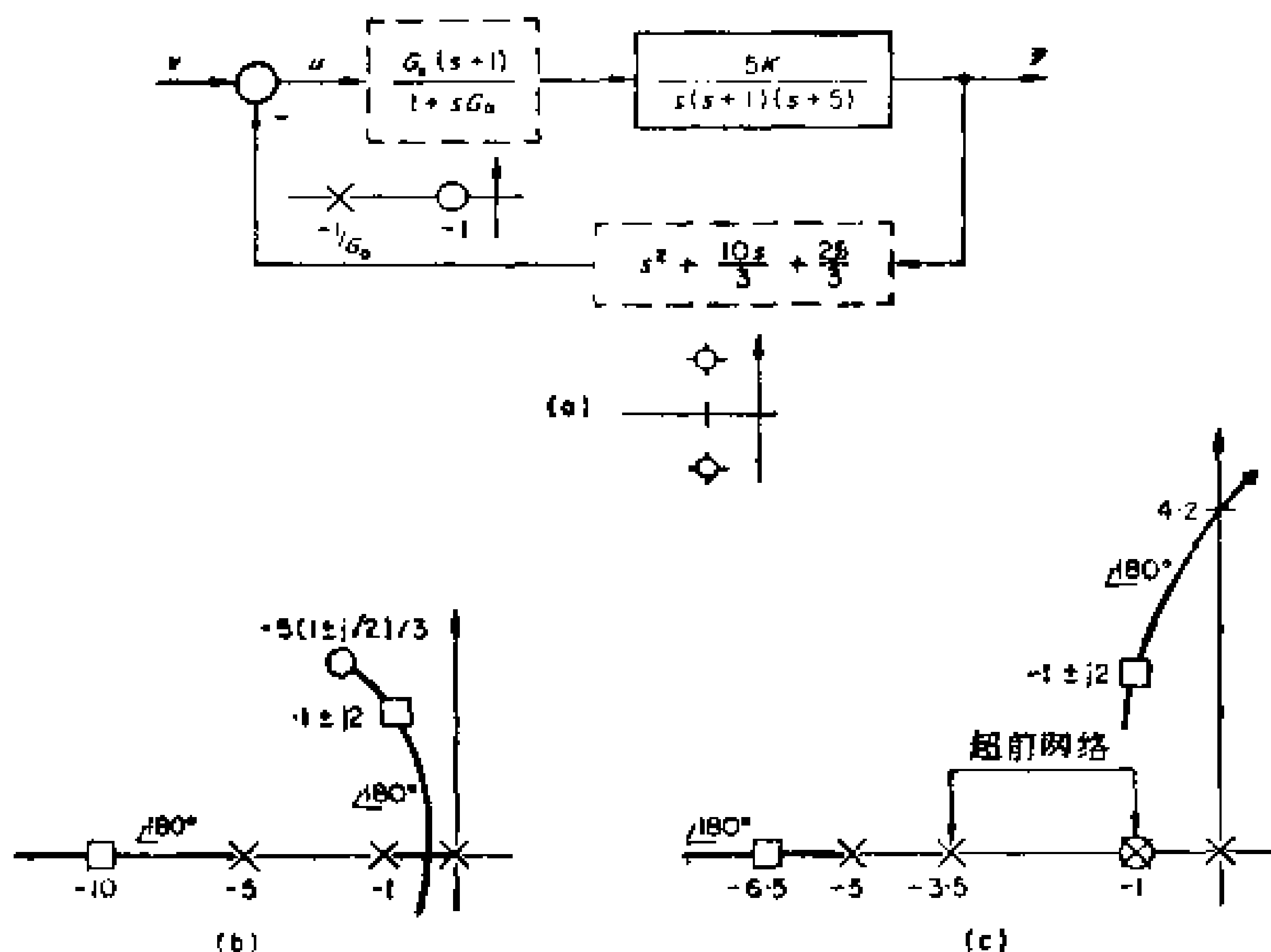


图 4.3 状态变量反馈：(a) 系统；(b) s 平面图；(c) 具有超前网络的 s 平面图

如图 4.3(a) 所示(对于状态变量反馈的情况，图中超前网络是没有的)．对应的根轨迹图的一般形式如图 4.3 (b)，其中从主要的极点开始的 180° 线通过期望的位置 $(-1 \pm j2)$ 并终止于复数零点．在负实轴上还有另外一条 180° 线，在此线上有一个位于 -10 的极点．

与此相比较，使用相位超前网络以得到同样复数极点的设计示于图 4.3 (c)．这里把相位超前网络的零点设计得与 -1 处的极点对消． 180° 线通过 $-1 \pm j2$ (要把极点放在这些点上，要求 $K \approx 30$) 且在 $\omega = \pm 4.2$ 处穿过虚轴．当 $K \approx 150$ 时，系统变成不稳定的．在设计中没有指定负实轴上的极点的位置，当 $K \approx$

30 时，它大约在 −6.5 处．由于设计要求，这里采用零点极点相消的办法使系统保持为三阶．但是，严格地说，这个系统是在 $\lambda=-1$ 处有一个不能控极点的四阶系统(参阅第五章)．引入补偿常常会增加系统的阶数，而用状态变量反馈方法则不增加．

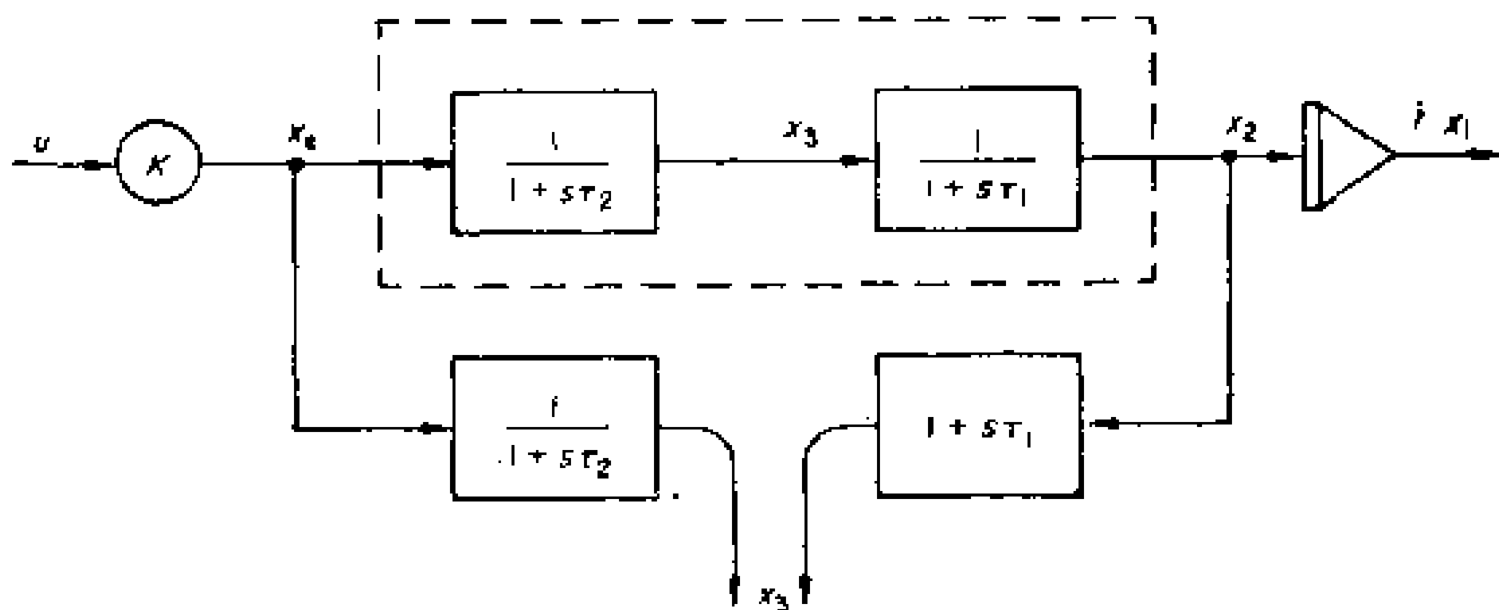


图 4.4 得到隐含的状态 x_3 的方法

4.2 隐含的状态变量

运用前面所提的状态变量反馈方法时，要假定所有状态信号都可以用作反馈．如果某个状态信号不可供反馈之用，原则上，可由其他状态经适当的变换得到该状态．更完善的方法是使用观测器来估计这些状态(参看第五章)．在图 4.4 中，假定 x_3 是不能利用的，但可从

$$x_3=x_e/(1+s\tau_2) \tag{4.25a}$$

或从

$$x_3=x_2(1+s\tau_1) \tag{4.25b}$$

得到．从 x_2 得到 x_3 要进行一次微分 ($s\tau_1\to\tau_1 d/dt$)，这会增强干扰，因此，宁可由 x_e 通过一个时间常数(一阶惯性环节)得到 x_3．

有时，隐含的状态是不明显的．例如图 4.5 (a) 的系统，其前向通道传递函数是二阶的，但只有一个输入和一个输出可供利用．然而因为其传递函数是二阶的，它必有一个附加的内部状态．此

外，从复极点开始的 180° 线穿过虚轴(如图 4.5 (b) 所示)，这是一个难以稳定的情况．如果取唯一可利用的中间状态 x_2 作反馈，则可得

$$H_b(s) = 1 + k_2 s \tag{4.26}$$

这等效于普通的速度反馈(测速发电机反馈)，这在 $s = -1/k_2$ 处给出一个单零点，这样，就可以将此零点放置在负实轴上任何地方．当 k_2 增大时，180° 线摆向虚轴．$k_2 > 1/2$ 时，这些线就不穿过虚轴．当 $k_2 \to \infty$ 时，它抵消在原点处的极点，而 180° 线是一条从复极点开始的垂线．因此，对于任意 k_2 值，只能在阴影区得到闭环回路的极点，这都是阻尼不足的情况．

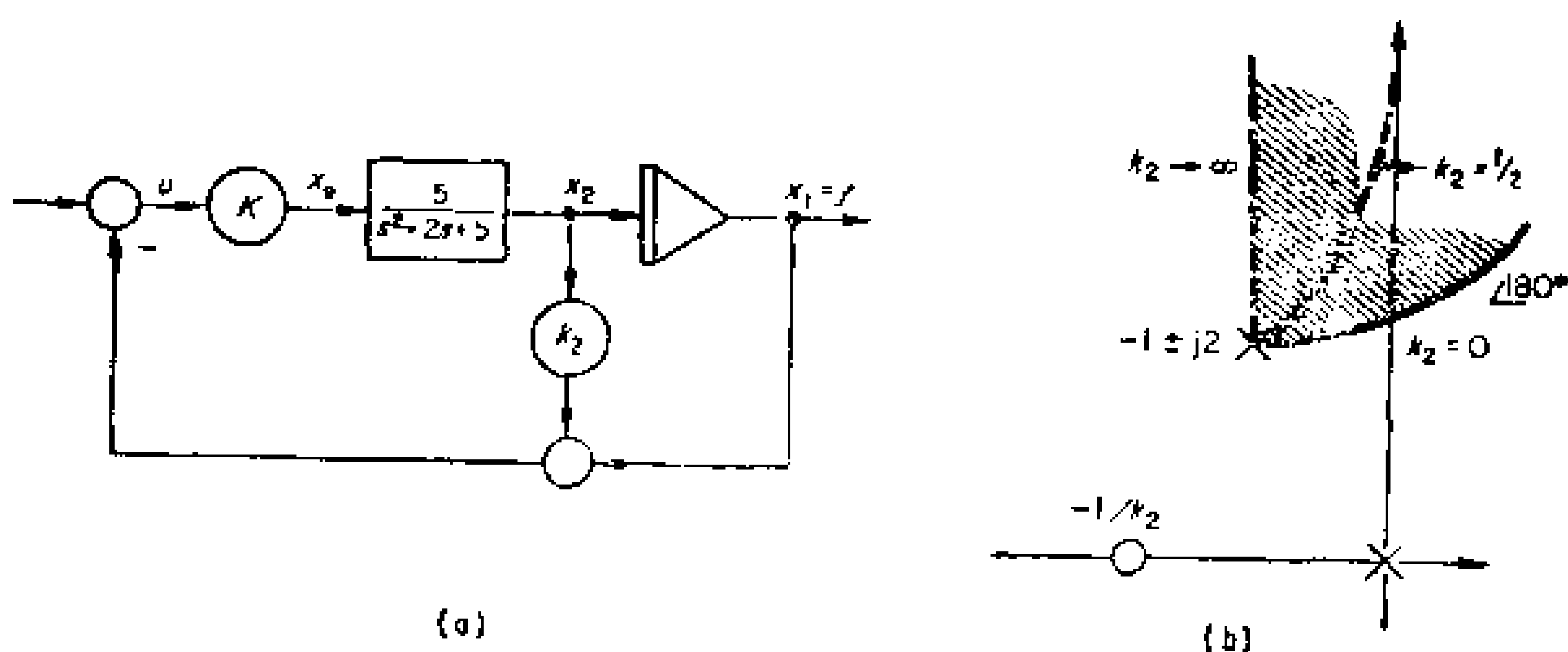


图 4.5 (a) 隐含的状态不明显；(b) s 平面图

为了得到一个附加的状态变量，可用任何具有相同的总传递函数且能提供一个附加状态的其它表达式代替这二阶方框．因此，对于图 4.5 (a) 的传递函数

$$\frac{x_2}{x_e}(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 5} \tag{4.27}$$

可考虑由图 4.6 (a) 虚线框内的结构形式代替，它本身是一个反馈系统，并包含一附加状态 x_3．状态 x_3 不能直接得到，但可用方块图的分解形式的第一个方块来复现，这个方块是由可得到的信号 x_e 和 x_2 驱动的．这样，式 (4.27) 的一个内部状态便可供利用了，如图 4.6(b)．状态变量反馈的总体安排如图 4.6 (c)．

为了进行设计计算，我们认为 x_3 可由 x_1 得到．假定是单位调准 ($k_1=1$)，则有

$$H_b(s)=1+sk_2+s(s+1)k_3 \tag{4.28}$$

如果要求闭环极点在 $\lambda=-2\pm j2$，-3 处，相应的特征方程便是

$$s^3+7s^2+20s+24=0 \tag{4.29}$$

把此式与特征方程的一般形式

$$KG(s)H_b(s)+1=0$$

相比较，可得到

$$K=24/5;\ k_2=5/12;\ k_3=5/24 \tag{4.30}$$

对于这些数值，$H_b(s)$ 的零点在 $s=-1.5\pm j1.6$ 处，给出了如图 4.6 (d) 所示的开环 180° 线和所要求的闭环极点．从 180° 线的形

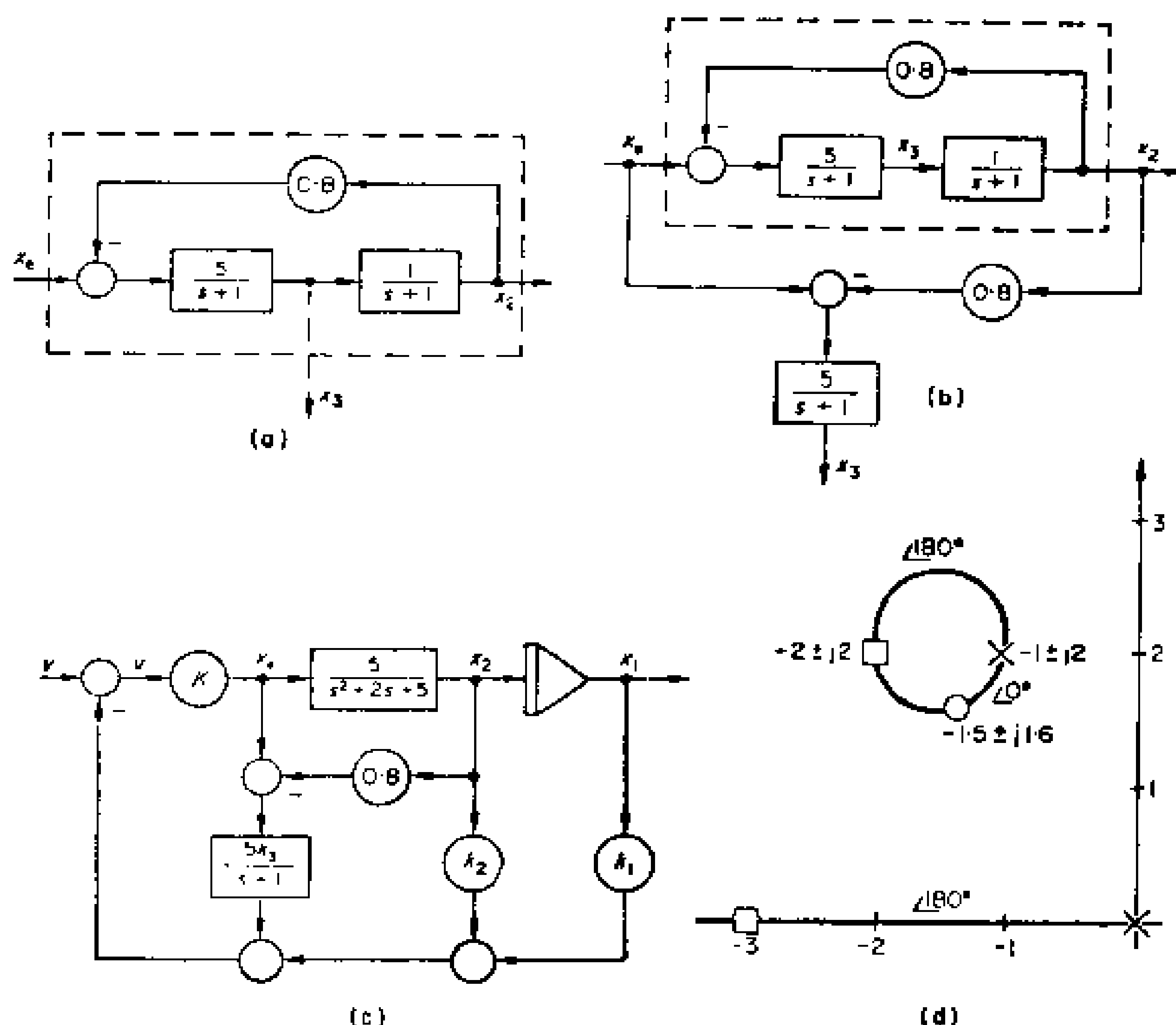


图 4.6 具有隐含状态的系统：(a) 得到隐含状态；(b) 等价系统；(c) 总系统；(d) s 平面图

状来看，对于 $0 < K < \infty$ 的范围，系统都是稳定的．这个例子说明了获得隐含状态的一般方法．为了提供隐含状态，式(4.27)的结构形式的选择是有很大的任意性的，然而也有某些限制(参看第5.7节)．

4.3 闭环品质特性

前面所叙述的状态变量反馈的应用，主要涉及到满足闭环极点的要求(作为闭环传递函数的特性)．但是在许多情况下还有另外的要求，如前面提到的单位调准或对斜坡输入的稳态跟踪误差的某些限制等．这些要求常常可归结为前向通道所必需有的相应特性——对单位调准和对斜坡输入有恒定的跟踪误差则需要有一次积分(一类系统)；对零跟踪误差要有二次积分(二类系统)——并且可用闭环传递函数 $y(s)/v(s)$ 或误差传递函数 $u(s)/v(s)$ 来表示．本节论述状态变量表达式与品质特性之间的关系．

由传递函数得到品质特性

一个系统的品质特性常常以阶跃、斜坡或加速度输入下的稳态响应来表示．借助闭环的传递函数 $T(s)$，对这些输入的响应 $y(s)$ 可以表示如下：

对单位阶跃输入的响应

$$y(s) = \frac{T(s)}{s} = \frac{r_1}{s} + F_1(s) \tag{4.31a}$$

对单位速度或斜坡输入的响应

$$y(s) = \frac{T(s)}{s^2} = \frac{r_1}{s^2} + \frac{r_2}{s} + F_2(s) \tag{4.31b}$$

对单位加速度输入的响应

$$y(s) = \frac{T(s)}{s^3} = \frac{r_1}{s^3} + \frac{r_2}{s^2} + \frac{r_3}{s} + F_3(s) \tag{4.31c}$$

这里已对每种情况进行了部分分式展开，s 幂的倒数项表示系统

输出中稳态响应的各个分量，$F(s)$ 代表系统极点所产生的过渡过程的衰减分量．如果系统要复现输入信号，对每种情况 r_1 都必须是 1．对于斜坡输入，r_2/s 是给出稳态跟踪误差 u_{ss} 的一个常数分量(参看图 4.7 a)，所以

$$r_2 = -\frac{1}{K_v}$$

K_v 就是通常的速度误差常数，因为误差是滞后性的，故带有负号．在加速度输入时，如果要求误差为常数，则 r_2 必须为零(此时要求 $K_v \to \infty$)，以防止输出含有偏离输入值越来越远的发散分量；而 r_3/s 是加速度输入引起的稳态误差，因此

$$r_3 = -\frac{1}{K_a}$$

K_a 就是通常的加速度误差常数．把 $T(s)$ 乘以适当的 s 幂项之后求微分，再求 $s \to 0$ 时的极限，可以求出系数 $r_1, \cdots$ 等．式(4.31a)乘以 s 得到

$$T(s) = r_1 + sF_1(s)$$

令 $s \to 0$

$$T(0) = r_1 = 1 \tag{4.32}$$

式(4.31b)乘以 s^2，得

$$T(s) = r_1 + sr_2 + s^2F_2(s)$$

$s \to 0$，得

$$T(0) = r_1 = 1 \tag{4.33}$$

此外

$$\frac{dT(s)}{ds} = T'(s) = r_2 + 2sF_2(s)$$

$s \to 0$ 得

$$T'(0) = r_2 \tag{4.34}$$

对于方程式(4.31c)则乘以 s^3，得到

$$T(s) = r_1 + sr_2 + s^2r_3 + s^3F_3(s)$$

得到的结果是

$$T(0)=r_1=1,\ T'(0)=r_2=0,\ T''(0)=2r_3 \quad (4.35)$$

这里 r_2 必须是零以防止输出有发散分量. 从这些结果可知，稳态误差决定于传递函数的导数在 $s\to 0$ 时的数值. 在状态变量表达式

$$T(s)=\mathbf{c}^T[s\mathbf{I}-\mathbf{A}_c]^{-1}\mathbf{b}$$

中，可求出

$$T(0)=r_1=1=-\mathbf{c}^T\mathbf{A}_c^{-1}\mathbf{b} \quad (4.36a)$$

$$T'(0)=r_2=-\mathbf{c}^T\mathbf{A}_c^{-2}\mathbf{b}=-\frac{1}{K_v} \quad (4.36b)$$

$$T''(0)=2r_3=-2\mathbf{c}^T\mathbf{A}_c^{-3}\mathbf{b}=-\frac{2}{K_a} \quad (4.36c)$$

引用对角线系统可得到上列的微分关系，

$$T(s)=\mathbf{c}^T\mathbf{W}[s\mathbf{I}-\mathbf{\Lambda}_c]^{-1}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{b}$$

展开上式并求微分，得

$$T'(0)=-\mathbf{c}^T\mathbf{W}\mathbf{\Lambda}_c^{-2}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{b}=-\mathbf{c}^T\mathbf{A}_c^{-2}\mathbf{b}$$

和

$$T''(0)=-2\mathbf{c}^T\mathbf{A}_c^{-3}\mathbf{b}$$

如果传递函数表示为多项式之比

$$T(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{n_m s^m+n_{m-1}s^{m-1}+\cdots+n_1 s+n_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

则

$$T(0)=1=\frac{N(0)}{D(0)}=n_0/a_0 \quad (4.37)$$

为了得到有限的斜坡输入误差，必须满足式(4.37)，即要求 $a_0=n_0$，从而得到

$$T'(0)=\frac{N'(0)-D'(0)}{D(0)}=\frac{n_1-a_1}{a_0} \quad (4.38)$$

为了得到有限的加速度输入误差，必须满足式(4.37)的要求，并满足 $T'(0)=0$，即要求 $n_1=a_1$，由此得

$$T''(0)=\frac{N''(0)-D''(0)}{D(0)}=\frac{n_2-a_2}{a_0} \quad (4.39)$$

从这些结果可见，系统性能的种类直接关系到 $T(s)$ 中系数的配合.

系统的误差 $u(s)$ 可由下式得到：

$$u(s)=v(s)-y(s)=\{1-T(s)\}v(s)$$
$$=(1-\boldsymbol{c}^T[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_c]^{-1}\boldsymbol{b})v(s) \qquad (4.40a)$$

单位调准要求 $u(0)$ 为零,则

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A}_c^{-1}\boldsymbol{b}=-1 \qquad (4.40b)$$

把式(4.85)用于式(4.40a)中,就得到

$$\frac{u(s)}{v(s)}=\frac{\mathrm{cet}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_c-\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^T]}{\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_c]} \qquad (4.41)$$

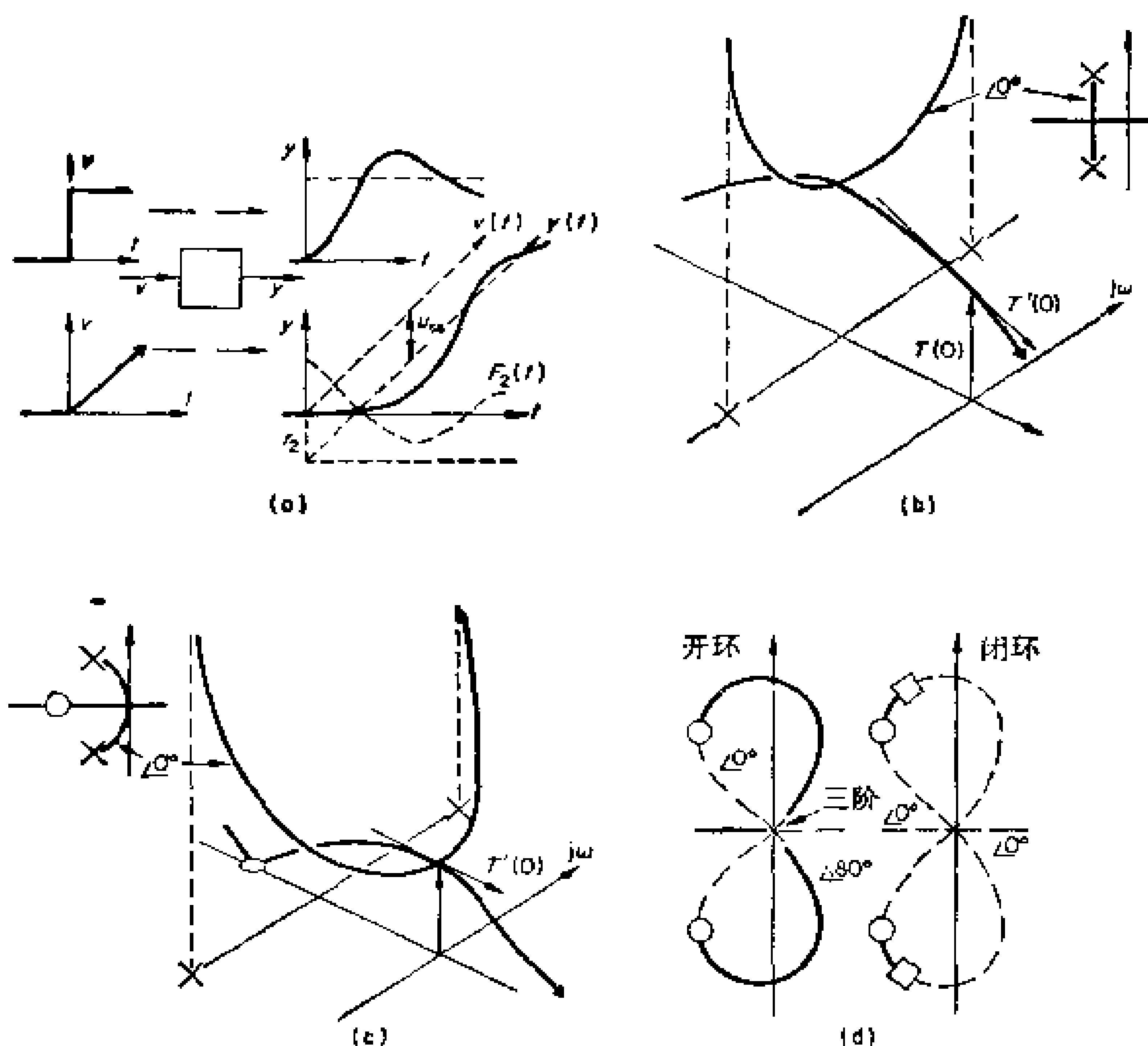


图 4.7 误差特性：(a) 一类系统；(b)，(c) 一类系统和二类系统在 s 平面上的闭环传递函数的幅值特性；(d) 三类系统的开环和闭环传递函数的 s 平面图

展开式 (4.41) 便得到误差对输入的传递函数. 利用后面第 4.5 节的式 (4.85) 并分别令 $\boldsymbol{M}^{-1}=\boldsymbol{A}_c^{-2}$, $\boldsymbol{A}_c^{-3}$ 及 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}_c^2$, $\boldsymbol{A}_c^3$, 可将式 (4.36b) 与式 (4.36c) 整理如下.

$$\frac{1}{K_v}=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A}_c^{-2}\boldsymbol{b}=\frac{\det[\boldsymbol{A}_c^2+\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^T]}{(\det\boldsymbol{A}_c)^2}-1 \tag{4.42a}$$

$$\frac{1}{K_u}=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A}_c^{-3}\boldsymbol{b}=\frac{\det[\boldsymbol{A}_c^3+\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^T]}{(\det\boldsymbol{A}_c)^3}-1 \tag{4.42b}$$

零点极点图特性

如果观察 $T(s)$ 的零点极点图, $T(0)$ 应是 1, 而 $T'(0)$ 则表示传递函数幅值的曲面沿实轴方向的斜率,如图 4.7 (b) 所示. 图中把含有两个复极点的 $T(s)$ 沿 0° 线上的幅值在垂直于 s 平面的方向上画了出来.在原点处斜率为负,相应于对斜坡输入具有稳态跟踪滞后. 如果 $T(s)$ 含有一个零点,则它会改变在原点处曲面的斜率,使之为零甚至为正. 如 $T'(0)$ 为零, 则在原点处有一鞍点, 如图 4.7 (c) 所示, 而系统稳态跟踪误差为零 (二类系统). 由式 (4.38), $T'(0)$ 的数值决定于 n_1 与 a_1 之差, 并且如果 $n_1=a_1$, 则 $T'(0)$ 为零, 它要求 $T(s)$ 至少有一个零点. 尽管该零点可以由局部反馈回路的极点产生,但必须出现在前向通道里. 容易看出,在状态变量反馈 $H_b(s)$ 中产生的零点不会出现在 $T(s)$ 中.

对于三类系统, $T'(0)$, $T''(0)$ 必须为零, 它要求在原点处有二阶鞍点, 如图 4.7 (d) 所示. 满足式 (4.38) 和 (4.39) 意味着在 $T(s)$ 中至少有两个零点.

例

为了阐明前面的观点,我们研究图 4.8 的闭环系统, 其前向通道传递函数为

$$\frac{y}{u}(s)=\frac{K}{s(s+1)}$$

或以状态变量形式表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ K\end{bmatrix}u \tag{4.43}$$

如果加入速度反馈（$k_2\ x_2$），则有

$$\boldsymbol{A}_c=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ K\end{bmatrix}[1\ k_2]=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -K & -1-Kk_2\end{bmatrix}\quad(4.44)$$

这里只有两个可调节的参数（k_2 和 K），所以只能指定闭环极点．由于在系统的前向通道里有一个积分器，所以系统有单位调准，但不能控制它的斜坡跟踪误差．如果闭环极点指定为

$$\lambda_{1,2}=-1\pm j2$$

则有

$$\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_c]=s(s+1+Kk_2)+K=s^2+2s+5\quad(4.45)$$

比较式（4.45）的系数，得到

$$K=5;\ k_2=1/5\quad(4.46)$$

由一般的闭环传递函数关系式

$$\boldsymbol{T}(s)=\boldsymbol{c}^T[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_c]^{-1}\boldsymbol{b}=\frac{[1\ \ 0]}{s^2+2s+5}\begin{bmatrix}s+2 & 1\\ -5 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 5\end{bmatrix}\quad(4.47)$$

可看到

$$T(0)=\frac{[1\ \ 0]}{5}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 5\end{bmatrix}=1\quad(4.48)$$

这和预期的相同．同时，由式（4.36b），

$$T'(0)=-\frac{[1\ \ 0]}{25}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 5\end{bmatrix}=-2/5\quad(4.49)$$

这表明跟踪误差滞后是 2/5．这很容易验证，在图 4.8 中对应于单位斜坡输入且 x_1 为单位值时计算各信号的数值（图上括号内的数值），可知跟踪滞后确是 2/5．

由于没有多余的参数可供调整，我们不能改变跟踪误差．然而，如果 $\boldsymbol{b}$ 包含两个元素，则在必要时可以选择 b_1 和 b_2 使 $T'(0)$ 为零．b_1 表示一个前馈，如图 4.8 中的虚线所示，这时前向通道的传递函数变为

$$\frac{y}{u}(s)=\frac{b_2}{s(s+1)}+\frac{b_1}{s}=\frac{b_1(s+1+b_2/b_1)}{s(s+1)}\quad(4.50)$$

且在 $s=-(1+b_2/b_1)$ 处引入一个零点．实际上往往不可能引

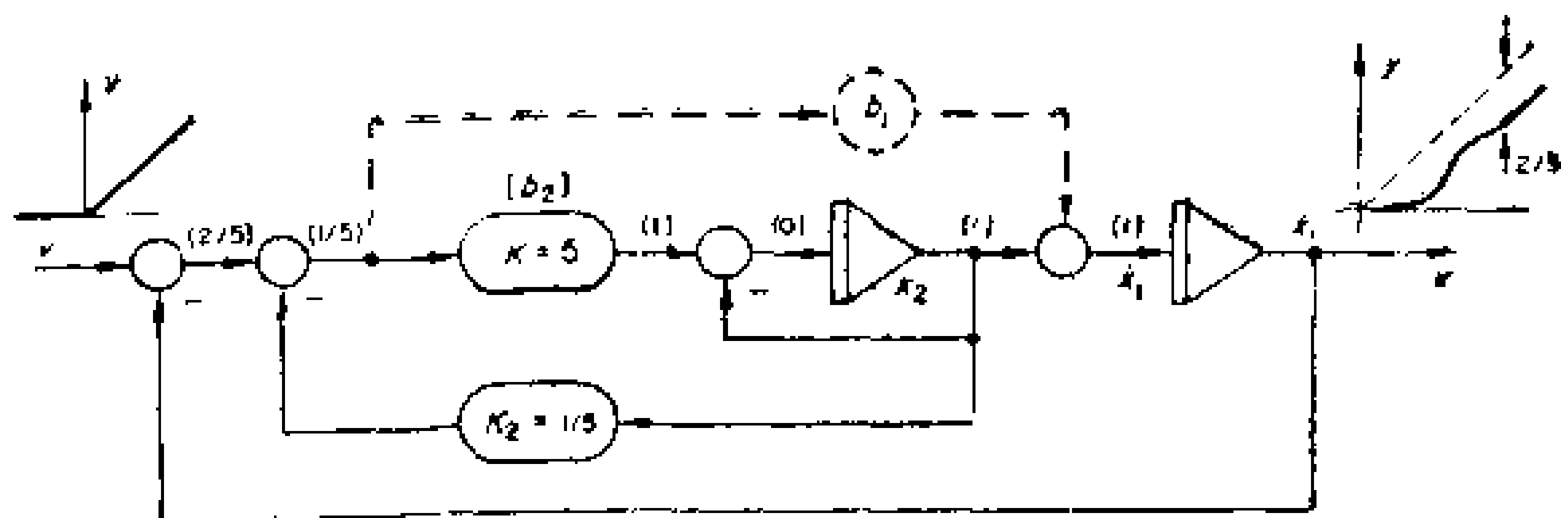


图 4.8 稳态跟踪误差和前馈通道 b_1

入 b_1，因为有非零的 b_1 意味着误差信号可以立即影响输出速度 $\dot{x}_1$，而当输出部件是马达一类的机电系统时，这是不可能的．尽管如此，把这个设计问题继续讨论下去还是有意义的．

假定可以引入 b_1，则闭环系统矩阵可写成

$$\boldsymbol{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} [-1 \ -k_2] = \begin{bmatrix} -b_1 & 1 - b_1k_2 \\ -b_2 & -1 - b_2k_2 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

为了得到和式 (4.45) 相同的闭环回路极点，特征方程应为

$$\det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_c] = (s + b_1)(s + 1 + b_2k_2) + b_2(1 - b_1k_2) = s^2 + 2s + 5 \quad (4.52)$$

比较两边系数得到

$$1 + b_1 + b_2k_2 = 2; \quad b_1 + b_2 = 5$$

对于 $T'(0) = 0$，要求

$$b_2k_2 = -1$$

从这些关系式可以求出

$$b_1 = 2; \quad b_2 = 3; \quad k_2 = -1/3 \quad (4.53)$$

由此得到如图 4.9 (a) 所示的系统．从 x_2 通过 k_2 到 $\dot{x}_2$ 的净反馈实际上是正的，因此把一阶惯性环节改变为纯积分．由于与 x_2 对消，前馈通道 b_1 ($b_1 = 2$) 在系统前向通道中引入一个零点，得到的前向通道传递函数为

$$\frac{y}{u}(s) = \left(\frac{5}{s} + 2\right)\frac{1}{s} = \frac{2(s + 2.5)}{s^2} \quad (4.54)$$

图 4.9 (b) 表示完整的系统图，它的零点在 $s = -2.5$ 处．图 4.9(c)

画出了开环和闭环零点极点图，在原点处它们分别有双重极点和鞍点.

由式 (4.53) 和 (4.54) 得到

$$A_c = \begin{bmatrix} -2 & 5/3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}; \ b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{4.55}$$

其传递函数是

$$T(s) = \frac{2s + 5}{s^2 + 2s + 5} \tag{4.56}$$

它表现出二类系统的特征(参看式(4.38)).由式(4.40b)和式(4.42)也可以验证预期的结果:

$$c^T A_c^{-1} b = \frac{[1 \ \ 0]}{5} \begin{bmatrix} 0 & -5/3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = -1 \tag{4.57a}$$

$$c^T A_c^{-2} b = [c^T A_c^{-1}][A_c^{-1} b] = m^T n = [0 \ \ -1/3] \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{4.57b}$$

$$c^T A_c^{-3} b = m^T A_c^{-1} n = 1/5 \tag{4.57c}$$

在式 (4.57b) 和式 (4.57c) 中，我们把关系式分解为 m^T 和 n 等元

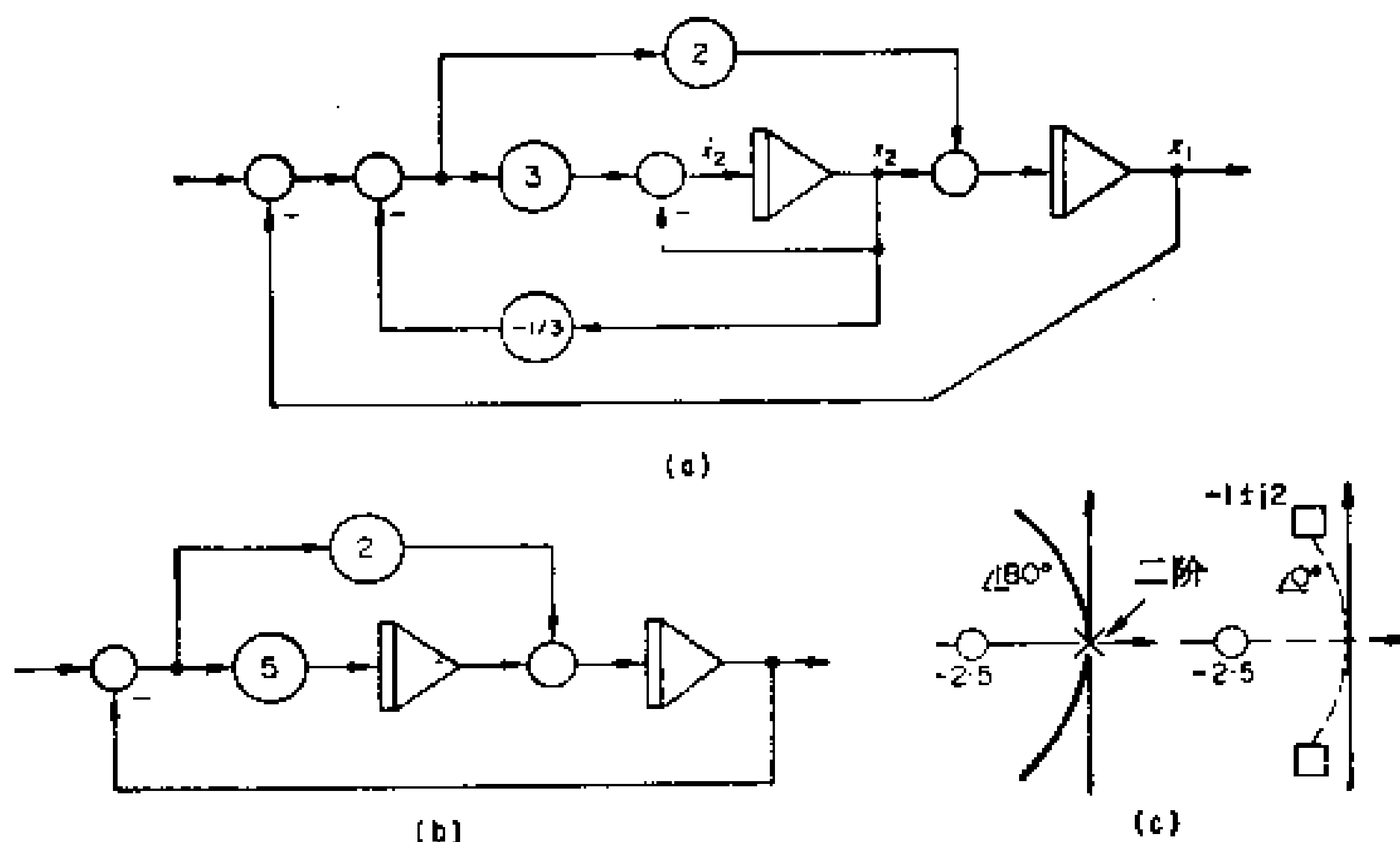


图 4.9 二类系统：(a) 各个信号的通道；(b) 等效系统图；(c) s 平面特性

素，以简化计算.

4.4 引入附加参数

如果要求控制如图 4.8 所示系统的跟踪误差，而又不能引入 b_1，则必须增加系统的阶数，使 $\boldsymbol{b}$ 可能有较多的元素，以便产生前向通道的零点. 增加阶数后系统的前向通道的一般形式如下:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u \tag{4.58}$$

其中，* 表示一未确定的元素. 比较容易的设计方法是，先确定所要求的闭环系统矩阵 $\boldsymbol{A}_c$，然后通过比较，可确定 $\boldsymbol{A}$ 中的未确定元素以及其他元素的变化. 由于系统的阶数增加了，必须指定闭环回路的另外一个极点.

由于闭环系统的最末元素起纯积分作用，因此将系统画成图 4.10 (a) 的一般形式是有利的. 图中 $\boldsymbol{b}$ 的元素也是从 x_1 到前向通道的反馈项，所以它们实际上是 $\boldsymbol{A}_c$ 中的第一列，此时闭环系统方程式是

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} v \\ y &= [1 \;\; 0 \;\; 0] \boldsymbol{x} \end{aligned}\right\} \tag{4.59}$$

特征方程是

$$\det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_c] = s^3 + s^2(-a_{22} - a_{33}) + s(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} + a_{21}) + (a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) = 0 \tag{4.60}$$

由于有积分作用，此系统可提供单位调准. 如果要求有二类特性，则由 $T'(0) = 0$ 的条件可求出

$$(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23})(a_{23}a_{31} - a_{33}a_{21}) = 0 \tag{4.61}$$

上式第二项是特征方程中的常数项，故由式 (4.61) 要求

$$a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} = 0 \tag{4.62}$$

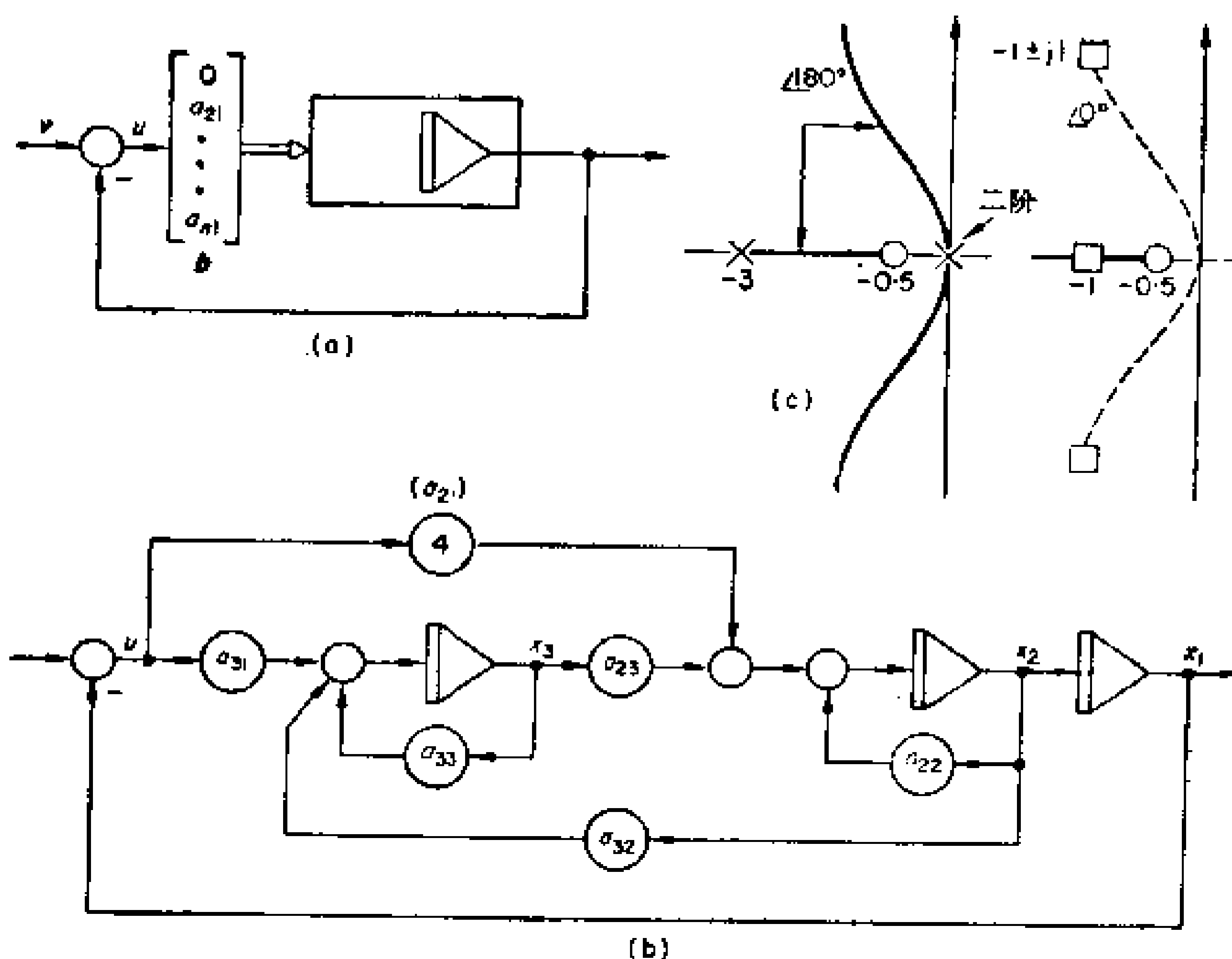


图 4.10 一般系统：(a) 方块图形式；(b) 三阶例子；(c) s 平面图

如果指定极点在 $\lambda = -1 \pm j1$，-1 处，则希望的特征方程为

$$s^3 + 3s^2 + 4s + 2 = 0 \qquad (4.63)$$

将该式与式(4.60)进行比较，并考虑到式(4.62)可导出设计方程

$$a_{21} = 4 \qquad (4.64a)$$

$$a_{22} + a_{33} = -3 \qquad (4.64b)$$

$$a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} = 2 \qquad (4.64c)$$

$$a_{22}a_{33} = a_{32}a_{23} \qquad (4.64d)$$

由式(4.59)，一般系统应具有图 4.10(b)的形式，它有一个内回路，其极点由式

$$\frac{a_{23}a_{32}}{(s - a_{22})(s - a_{33})} = 1 \qquad (4.65)$$

或

$$s^2 + (-a_{22} - a_{33}) + a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} = 0 \qquad (4.66)$$

确定．把式(4.64b)和式(4.64d)代入得

$$s(s+3)=0 \tag{4.67}$$

此式表明，内回路的极点在原点（跟踪误差条件所要求）和 −3 点处．前向通道的传递函数是

$$\frac{x_1}{u}(s)=\frac{a_{21}(s-a_{33})+a_{31}a_{23}}{s^2(s+3)} \tag{4.68}$$

它的零点在

$$s=(a_{33}a_{21}-a_{31}a_{23})/a_{21}=-1/2 \tag{4.69}$$

最后得到传递函数为

$$\frac{x_1}{u}(s)=\frac{4(s+1/2)}{s^2(s+3)} \tag{4.70}$$

在图 4.10(c) 中画出了零点极点图，它给出了期望的闭环极点和原点处的鞍点．只要式(4.64)的元素满足其关系式，则上述结果与这些元素的数值无关．下面给出了四种可能的闭环回路矩阵，建议读者画出每个系统的方块图，并确定开环系统必须引入哪些变化．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{c_1}&=\begin{bmatrix}0&1&0\\-4&-3&1\\-2&0&0\end{bmatrix};\ \boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}0\\4\\2\end{bmatrix};\\
\boldsymbol{A}_{c_2}&=\begin{bmatrix}0&1&0\\-4&0&1\\10&0&-3\end{bmatrix};\ \boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}0\\4\\-10\end{bmatrix};\\
\boldsymbol{A}_{c_3}&=\begin{bmatrix}0&1&0\\-4&-1&1\\6&2&-2\end{bmatrix};\ \boldsymbol{b}_3=\begin{bmatrix}0\\4\\-6\end{bmatrix}\\
\boldsymbol{A}_{c_4}&=\begin{bmatrix}0&1&0\\-4&-5/2&5/4\\0&1&-1/2\end{bmatrix};\ \boldsymbol{b}_4=\begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.71}$$

每个系统的一般性质如下：

$\boldsymbol{A}_{c_1}$：a_{32} 和 a_{33} 两元素为零，对应着一个附加纯积分作用，a_{22} 在 −3 处给出一个极点．此系统要求有 −2 的速度反馈加在开环系

统上.

A_{c_2}: 由于 a_{22} 为零，x_2 的积分器起纯积分作用. 它要求数值为 1 的速度正反馈.

A_{c_3}: 对 x_3 的速度正反馈给出在 0 和 -3 的内环极点.

A_{c_4}: 元素 a_{31} 为零，在 $-1/2$ 处的零点由 x_3 积分器的内环(现在它在反馈通道中)的极点产生. 由于速度正反馈，在内环中得到另外一个积分作用.

实际上，最满意的设计应是 A_{c_1}，它的另外一个积分作用是由纯积分实现的，而其他系统则不同，都采用了速度正反馈. 对每种情况都可验证其传递函数为

$$\frac{y}{v}(s) = \frac{4s + 2}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2} \tag{4.72}$$

这正是式 (4.63) 和要求二类系统特性所期望的传递函数.

上述例子说明，用 A_c 进行一般性设计，甚至是设计简单的系统，也有很多种可能的方案. 较为实用的方法是先提出一个系统，它满足以某些特殊结构或传递函数提出来的性能要求，然后完成其细节设计.

三 类 系 统

对图 4.11 系统可进行简单的传递函数设计. 该系统的前向通道原先包含两个积分器 x_1 和 x_2，且要求有三类系统的特性（加速度输入的跟踪误差为零），和具有指定的极点. 这要求前向通道要有一个附加的积分作用. 式 (4.39) 说明在 $T(s)$ 中分子的系数 n_0, n_1, n_2 必须与分母的系数 a_0, a_1, a_2 相匹配. 分子包含两个零点，它们的位置可使 s 平面上原点处有 $T(s)$ 的二阶鞍点. 在此系统中，假定可以引入前馈 b_1. 如果闭环极点指定在

$$\lambda = -1 \pm j2; \quad \lambda = -2$$

则特征方程式应是

$$\begin{aligned}&(s + 1 + j2)(s + 1 - j2)(s + 2) \\ &= s^3 + 4s^2 + 9s + 10 = 0\end{aligned} \tag{4.73}$$

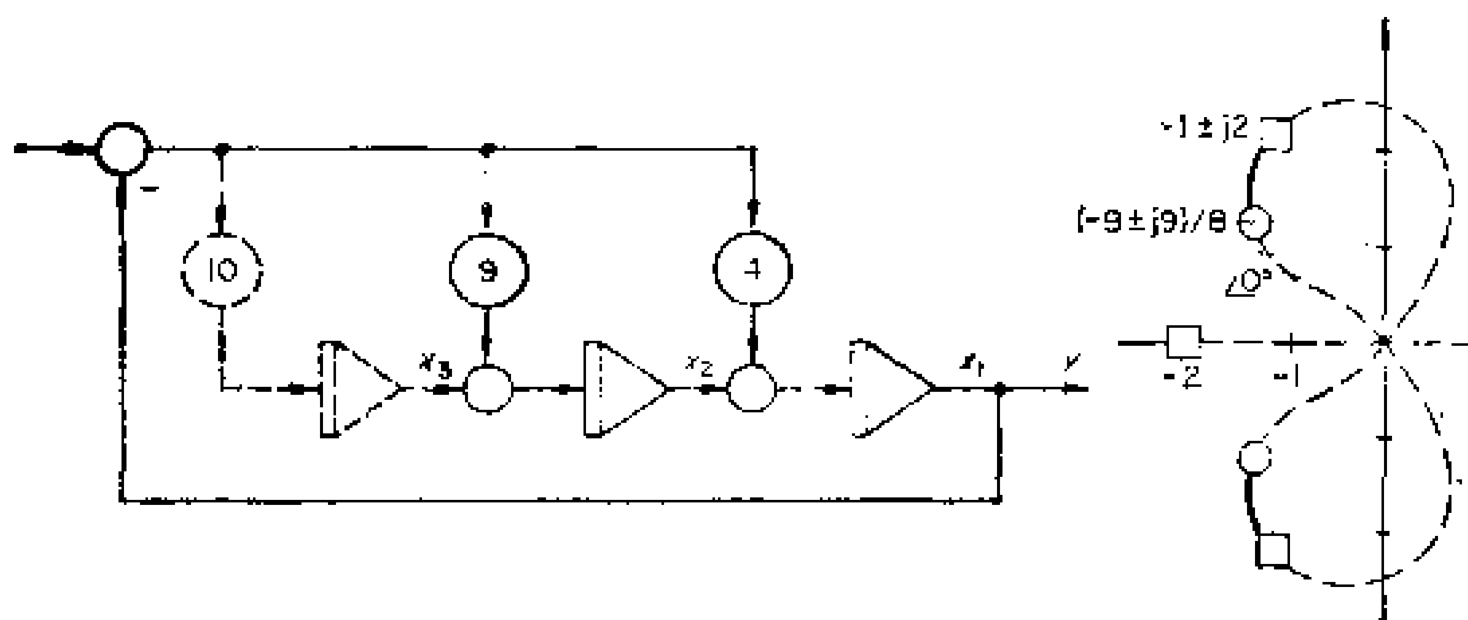


图 4.11 三类系统

而 $T(s)$ 必须是

$$T(s) = \frac{4s^2 + 9s + 10}{s^3 + 4s^2 + 9s + 10} \tag{4.74}$$

由此

$$b_3 = 10; \quad b_2 = 9; \quad b_1 = 4$$

由 $T(s)$ 的分子可知零点位置在

$$s \approx (-9 \pm j9)/8$$

处，其开环-闭环的根轨迹曲线如图 4.11 所示，在 $T(s)$ 的 0° 线上有二阶鞍点.

用状态变量描述，此系统有

$$\boldsymbol{A}_c = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 1 \\ -10 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix} \tag{4.75}$$

并可验证

$$\mathbf{c}^T\boldsymbol{A}_c^{-1}\boldsymbol{b} = -1; \quad \mathbf{c}^T\boldsymbol{A}_c^{-2}\boldsymbol{b} = 0;$$
$$\mathbf{c}^T\boldsymbol{A}_c^{-3}\boldsymbol{b} = 0; \quad \mathbf{c}^T\boldsymbol{A}_c^{-4}\boldsymbol{b} = 0.1 \tag{4.76}$$

此即所预期的结果，系统对于单位 $d^4v(t)/dt^4$ 输入有滞后 0.1.

谐 振 系 统

作为一个结构的例子，假定对一个含有状态 x_1 和 x_2 的无阻尼振荡系统施加反馈，如图 4.12 (a). 要求闭环系统是二类的，并具

有指定的极点．由于所给的系统没有自由积分项，必须在前向通道中引入两个积分作用．此外，由于 $a_{n-1}=-\sum(\boldsymbol{A}_c$ 中的主对角线元素)，如果要求特征方程式

$$s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0=0$$

中所有系数都是可调节的，则在 $\boldsymbol{A}_c$ 的主对角线上必须有一个可变动的元素．如果从 x_2 通过 a_{22} 进行反馈，则只需有 x_3 和 x_4 两个附加积分器，x_5 可以省掉，相应的闭环系统有

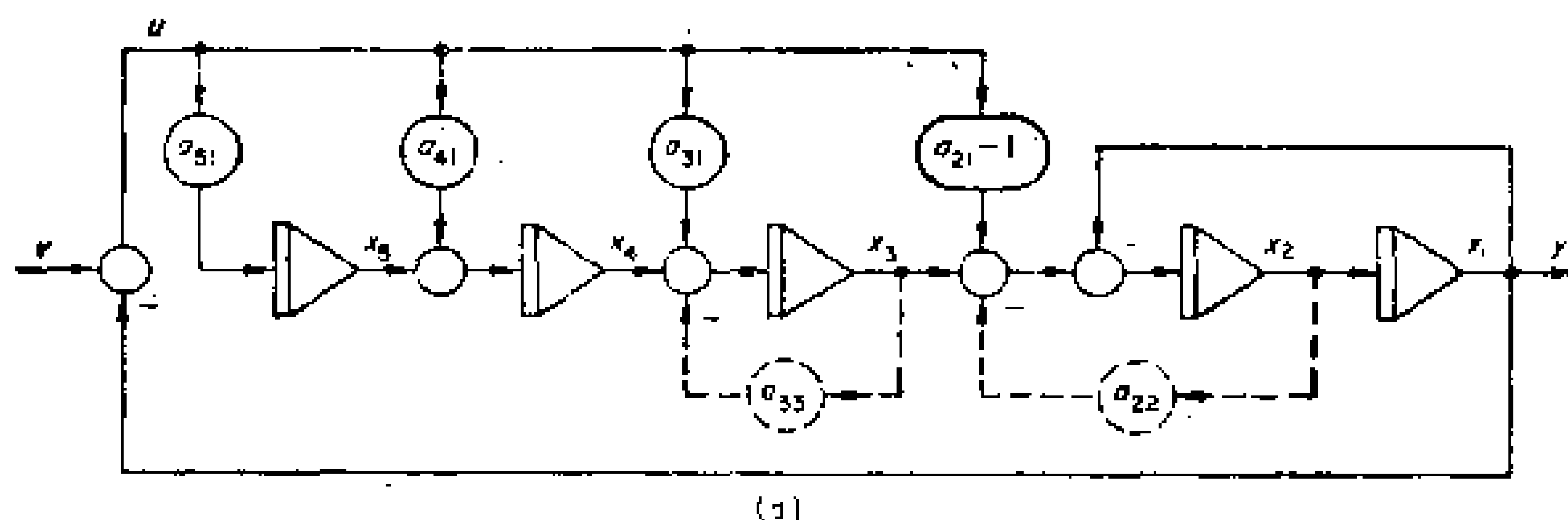
$$\boldsymbol{A}_{c_1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -a_{21} & -a_{22} & 1 & 0\\ -a_{31} & 0 & 0 & 1\\ -a_{41} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\ a_{21}-1\\ a_{31}\\ a_{41}\end{bmatrix} \tag{4.77}$$

由于有从 x_1 引出的内部反馈，故 $\boldsymbol{b}$ 不等于 $\boldsymbol{A}_c$ 的第一列．由 $\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_c]$ 式可得出特征方程式，但更为方便的方法是写出附加积分器和前馈元素（它在系统中产生零点）的传递函数 $H_f(s)$，参看图 4.12 (b)．然后可由式

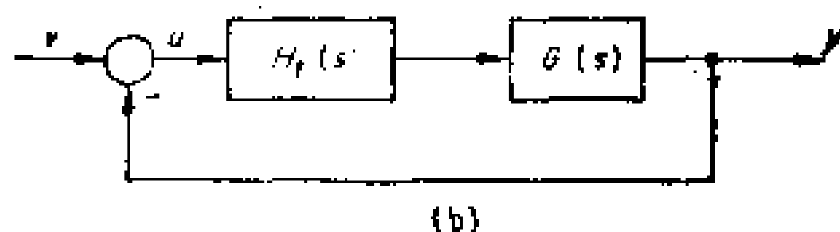
$$H_f(s)G(s)=-1 \tag{4.78a}$$

或

$$\left(\frac{a_{21}s^2+a_{31}s+a_{41}}{s^2}\right)\frac{1}{(s^2+a_{22}s+1)}=-1$$



(a)



(b)

(a) 系统；(b) 方块表现

图 4.12 振动系统

得到系统的特征方程式，即

$$s^4 + a_{22}s^3 + (a_{21} + 1)s^2 + a_{31}s + a_{41} = 0 \qquad (4.78b)$$

如果不能用 x_2 作为反馈，则可利用（例如）a_{33} 作为 A_c 中的可变动元素，并引入 x_5 以得到两个自由积分项. 这时系统矩阵为

$$\boldsymbol{A}_{c_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_{31} & 0 & -a_{33} & 1 & 0 \\ -a_{41} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{21} - 1 \\ a_{31} \\ a_{41} \\ a_{51} \end{bmatrix} \qquad (4.79)$$

特征方程式是

$$s^5 + a_{33}s^4 + a_{21}s^3 + (a_{31} + a_{21}a_{33})s^2 + a_{41}s + a_{51} = 0 \quad (4.80)$$

原则上，也可以用对角线元素 a_{44} 和 a_{55} 作为可变动元素以代替 a_{33}，但是那时式（4.80）的系数将变为矩阵元素的较复杂的函数. 习题 4.9 给出了式（4.79）的数字例子.

4.5 传递函数变换的矩阵关系式

在前面几节中，我们以不同的形式推导了传递函数（式（4.3a）和（4.3b））和特征方程式（式（4.4a）和（4.4b））并且在误差分析中引用了一些关系式（见式（4.42a）和（4.42b）的推导）. 应用下面一般的矩阵关系式可以得到这些公式.

令

$$\boldsymbol{N} = [\boldsymbol{M} + \boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^T]^{-1} \qquad (4.81)$$

则有

$$\boldsymbol{N}[\boldsymbol{M} + \boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^T] = \boldsymbol{I}$$

用 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{p}$ 乘之得

$$\boldsymbol{N}[\boldsymbol{M} + \boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^T]\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{p}$$

或

$$\boldsymbol{N}[\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{p}] = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{p}$$

上式也可以写成

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{p}(1 + \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{p}$$

其中 $(1 + \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{p})$ 是标量，用式 (4.81) 代入得

$$[\boldsymbol{M} + \boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^T]^{-1} = \frac{\boldsymbol{M}^{-1}}{1 + \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{p}} \tag{4.82}$$

如果

$$\boldsymbol{M} = [s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}];\ \boldsymbol{p} = \boldsymbol{b};\ \boldsymbol{q}^T = \boldsymbol{k}^T \tag{4.83}$$

并把式 (4.82) 左乘以 $\boldsymbol{c}^T$，右乘以 $\boldsymbol{b}$，便可得到式 (4.3a) 和 (4.3b) 的传递函数.

式 (4.82) 两边逆阵的行列式应该相等，因此

$$\det[\boldsymbol{M} + \boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^T] = (1 + \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{p})\det\boldsymbol{M} \tag{4.84}$$

或

$$(1 + \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{p}) = \frac{\det[\boldsymbol{M} + \boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^T]}{\det\boldsymbol{M}} \tag{4.85}$$

从行列式的一般关系

$$\det[\boldsymbol{R}\boldsymbol{S}] = \det\boldsymbol{R}\det\boldsymbol{S}$$

和

$$\det[\boldsymbol{R}^i] = (\det\boldsymbol{R})^i$$

(对 i 为正或负皆成立)，可以把式 (4.84) 写成

$$\begin{aligned}(1 + \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{p}) &= \det[\boldsymbol{M}^{-1}]\det[\boldsymbol{M} + \boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^T] \\ &= \det[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^T]\end{aligned} \tag{4.86}$$

如果

$$(1 + \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{p}) = 0 \tag{4.87a}$$

则由式 (4.85) 和式 (4.86) 可得

$$\det[\boldsymbol{M} + \boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^T] = 0 \tag{4.87b}$$

和

$$\det[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^T] = 0 \tag{4.87c}$$

把式 (4.83) 代入上面三个式子，可给出系统特征方程的三种形式，其中由式 (4.87a) 和 (4.87b) 得到式 (4.4a) 和 (4.4b).

这一章讨论了状态变量反馈的一般原理，和它与用复频分析法设计单回路系统的关系. 可以看出，状态变量反馈是更为一般的校正形式，因为它可以引入零点(这在校正中是很重要的因素)，

而不会像采用通常的无源网络那样产生附加的极点．实际上，状态变量反馈提出了一个最终的设计，在这个设计中可以指定所有的极点位置，并自动地引入所需要的校正．由状态变量描述也可以直接得到通常由速度滞后或加速度滞后规定的误差性能准则．更为广泛的论述和其余方面可参阅下面的参考书．

参 考 文 献

Chen, C. T., *Introduction to Linear System Theory* (Holt, Rinehart and Winston, New York, 1975).

D'Azzo, J. J. and Houpis, C. H., *Linear Control System Analysis and Design* (McGraw-Hill, New York, 1975).

Gupta, S. C. and Hasdorff, L., *Fundamentals of Automatic Control* (Wiley, New York, 1970).

Melsa, J. L., and Schultz, D. G., *Linear Control Systems* (McGraw-Hill, New York, 1969).

Schultz, D. G., and Melsa, J. L., *State Functions and Linear Control Systems* (McGraw-Hill, New York, 1967).

习 题

4.1 一个系统的前向通道传递函数为

$$\frac{x_1}{u_3}(s)=\frac{K}{s(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$$

其中 $\tau_1=0.5$；$\tau_2=0.1$．要求闭环系统有单位调准且极点在 $\lambda=-3\pm j5$，-12 处．假定 $x_1(=y)$ 是积分器的状态，x_2 对应于 τ_1 的状态，x_3 对应于 τ_2 的状态，试确定所需的 K、$\boldsymbol{k}^T$ 数值．

写出具有反馈的系统矩阵 $\boldsymbol{A}_c$ 并验证 $\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_c]=0$ 给出预期的特征方程式．

标绘 $H_b(s)$ 的零点，并作出根轨迹曲线图以证明 K，$\boldsymbol{k}^T$ 的数值是正确的．

$$(\boldsymbol{k}^T=[1\quad 18.5/102\quad 3/102];\ K=20.4)$$

4.2 图 4.3(a) 的系统有式 (4.18) 的状态变量反馈．试验证，从式 (4.3a) 和 (4.3b) 的两种传递函数式都可得到具有单位调准的正确的传递函数．计算 $T'(0)$ 以确定对单位斜坡输入的稳态跟踪误差（参阅第 4.3 节），并在方块图中分析各信号的大小以证明结果的正确性．

(0.5)

4.3 设系统有

$$A_0 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

且

$$(1)\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ k^T = [k_1\ \ k_2]$$

$$(2)\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix};\ k^T = [1\ \ k_2]$$

$$(3)\ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix};\ k^T = [1\ \ 0]$$

对上列三种情况分别确定可变参数，使闭环极点在 $\lambda = -1 \pm j2$ 处。分别把三种情况的 b, k^T 画到 A_0 的方块图上，并变换方块图，得到系统的简化形式。

4.4 设系统前向通道传递函数是

$$\frac{x_1}{u}(s) = \frac{5K}{(s^2 + 2s + 5)}$$

应用状态变量反馈，使极点在 $\lambda = -2 \pm j2$ 处。第二个状态变量 x_2 是不可测量的，需要用第二节的办法通过附加的传递函数得到。如果前向通道表达式为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 5K \end{bmatrix} u$$

假定由 x_1 引出单位反馈，试决定一个合适的附加传递函数并完成此设计。绘制包括 $H_b(s)$ 零点的根轨迹曲线并说明此结果的正确性。

$(5/(s+2);\ K = 3/5;\ k_2 = 2/3)$

4.5 如果上题中附加传递函数的输出是 x_3，并给出

$$k^T x = [1\ \ 0\ \ k_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

当 K, k_3 与上题相同时，试证明全系统有

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -8 & -2 & -3 \\ -16/3 & 0 & -4 \end{bmatrix};\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

确定 A_c 的特征值，并从下式

$$x = [sI - A_c]^{-1} b v$$

求出每个状态对 v 的传递函数，并注意其振型的对消。消去的振型是不能控

的(参看第五章)。

4.6 对于图3.7的系统设有 $F_m = F_o = 0$，$J_m = J_o = 1$，且 $G_m = 1$，要求闭环极点位置在 $\lambda = -1 \pm j2$，-2，-3 处，并假定所有的状态变量都是可供利用的，试确定所需的状态变量反馈系数。计算由 $H_b(s)$ 引进的零点，并验证，180°线经过所指定的极点位置。

($k^T = [19\ \ 7\ \ 11\ \ 30]$；零点在 $s \approx -1.25$，$-0.75 \pm j1.7$)

4.7 一个前向通道是

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x;\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ c^T = [1\ \ 0]$$

的系统，输入为 u_1。在前向通道中应用了比例加积分控制，

$$\frac{u_2}{u_3}(s) = (k_p + k_i/s);\ u_3 = (v - y)$$

使得闭环极点为 $\lambda = -1 \pm j2$，-1。提出了两种设计，相应为

$$(a)\quad \dot{x} = Ax + \begin{bmatrix} 0 \\ k_p \\ k_i \end{bmatrix}(v - [1\ \ k_2\ \ 0]x)$$

$$(b)\quad \dot{x} = Ax - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_p & k_2 \\ k_i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_p \\ k_i \end{bmatrix} v$$

其中 x_3 是控制器中积分器的输出。

试绘出每个系统的方块图，根据特征方程，判断两者是否都可能？如果不可能，为什么？

求出所需的 k_i，k_2，k_p 的数值。证明系统具有单位调准，并确定对于斜坡输入的稳态跟踪误差。在方块图上考虑信号大小以验证跟踪误差。

((a) 没有足够的独立参数，$k_p = 6$；$k_i = 5$；$k_2 = 3$；误差 $= 1/5$)

4.8 具有

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

的一般系统，要求在 $\lambda = -1 \pm j2$ 处有极点，并具有二类特性。设

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

试确定 A 诸元素的数值或者诸元素间的关系。在方块图上考虑信号的大小以验证跟踪误差。

$$\left(\begin{array}{l} \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix};\ b_1=-a_{11}=2;\ a_{22}=0;\ b_2=-a_{21};\ a_{12}a_{21}=-5 \\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix};\ b_1=2;\ a_{22}=-5/2;\ a_{11}=1/2;\ a_{12}a_{21}=-5/4 \end{array}\right)$$

4.9 在下列条件下完成图 4.12 (a) 系统的设计，使之成为二类系统。

(1) 可引用 a_{22} 反馈(见式 (4.77))，且要求闭环极点在 $\lambda=-0.5\pm j1$ 及 $\lambda=-1\pm j0.5$ 处。

(2) 引用 a_{33} 反馈 (见式 (4.79))，闭环极点如习题 4.9 (1)，再加上 $\lambda=-1$ 极点。

$$\left(\begin{array}{l} (1)\ a_{21}=7/2;\ a_{22}=3;\ a_{31}=15/4;\ a_{41}=25/16 \\ (2)\ a_{21}=15/2;\ a_{31}=-(87/4);\ a_{33}=-4; \\ \qquad a_{41}=(85/16);\ a_{51}=(25/16) \end{array}\right)$$

第五章　能控性、能观测性和观测器

系统能控性和能观测性概念是状态变量分析和设计的重要方面．概括地说，如果一个系统可以由一个外加输入驱动到任意状态，该系统就称为能控的；反之，如果系统不可能达到某一任意状态，就是不能控的．如果由系统的输出 $\boldsymbol{y}$ 的测量值可以推算出状态 $\boldsymbol{x}$，系统就称为能观测的，如果由 $\boldsymbol{y}$ 不能推算出状态 $\boldsymbol{x}$，系统就是不能观测的．用固有振型来说，能控性意味着所有的振型都可由输入激发（控制）；能观测性意味着在输出 $\boldsymbol{y}$ 中可以检测（观测）到任一个被激发的振型．在能控性和能观测性的理论研究中，矩阵的秩是一个基本的概念．附录2讨论了矩阵的秩．这一章最后几节介绍观测器的原理，这些观测器可用以对隐含状态作出估计．

5.1　能观测性、能控性和零点极点相消

在一般地讨论能控性和能观测性之前，我们先用极点和零点来说明一些概念．图5.1中两个系统都有 $\lambda = -1, -2$ 的特征值．在每个系统中，-1 的极点都被一个零点相消，传递函数为

$$\frac{y}{u_2}(s) = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2} \tag{5.1}$$

但是在各系统中相消的机理却是不同的．根据一般的关系

$$\boldsymbol{x}(s) = [s\mathbf{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{b}u(s)$$

图5.1(a)的系统有

$$\boldsymbol{x}_a(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} (s+3) & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} u_2(s)$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}(s+1)\\-2(s+1)\end{bmatrix}u_2(s)$$

$$= \frac{1}{s+2}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}u_2(s) \tag{5.2a}$$

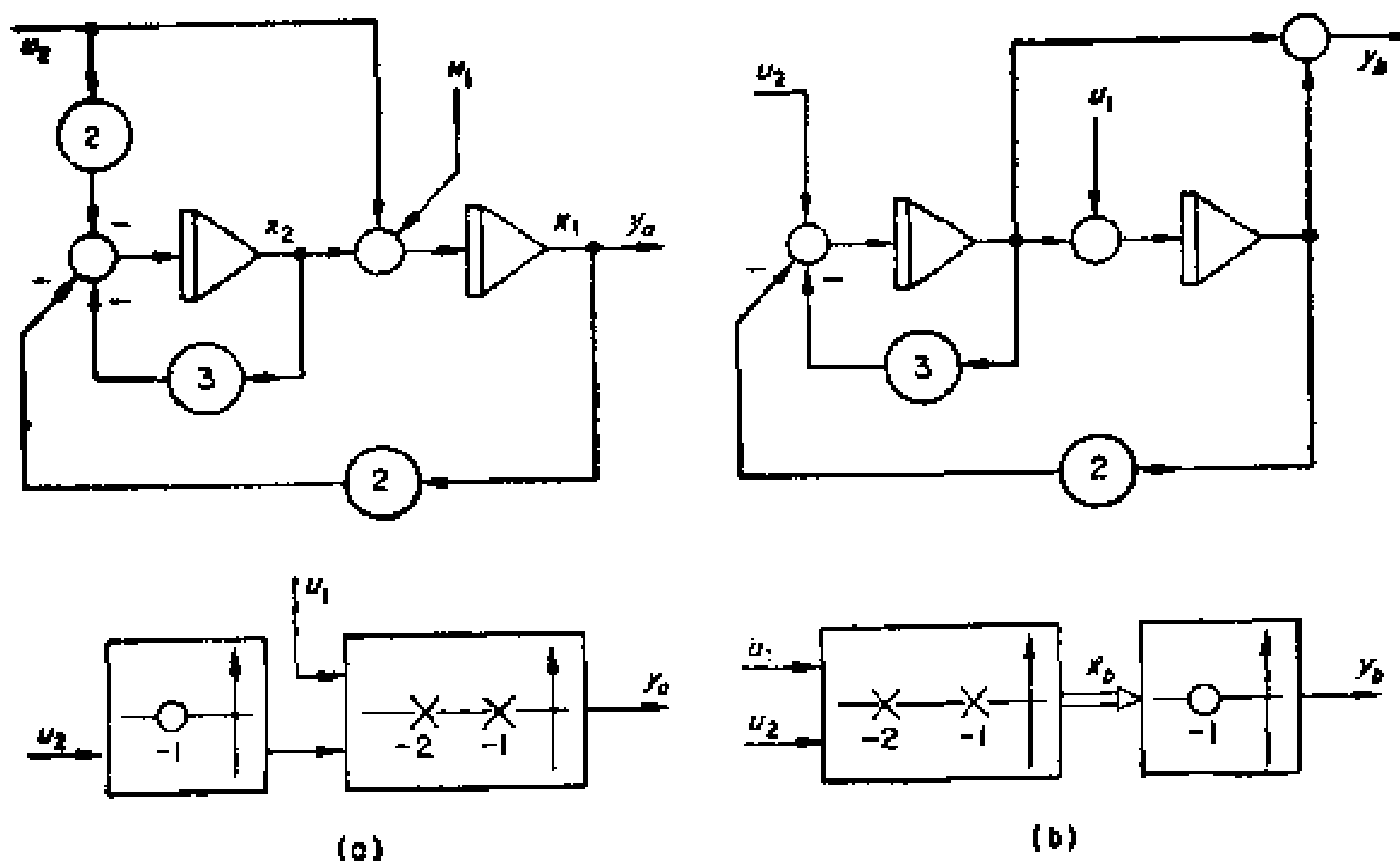


图 5.1 零点极点相消：(a) 不能控振型；(b) 不能观测振型

和

$$y_a(s) = [1\ \ 0]\boldsymbol{x}_a(s) = \frac{1}{s+2}u_2(s) \tag{5.2b}$$

在这种情况下，$\boldsymbol{x}_a(s)$ 并不含有在 -1 的极点，这是因为它被由 u_2 的两条输入通道的组合而在 $\boldsymbol{b}$ 中产生的一个零点抵消掉了．对图 5.1 (b) 的系统有：

$$\boldsymbol{x}_b(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\-2 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u_2(s)$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}1\\s\end{bmatrix}u_2(s) \tag{5.3a}$$

$$y_b(s) = [1\ \ 1]\boldsymbol{x}_b(s)$$

$$= \frac{s+1}{(s+1)(s+2)}u_2(s) = \frac{1}{s+2}u_2(s) \tag{5.3b}$$

在这种情况下，两个极点都存在于 $x_b(s)$ 中，但在输出中由 e^{t} 的形式产生了一个在 -1 的零点. 图 5.1a 的系统中由 u_2 到 x_1 积分器的输入端的传递函数是

$$\frac{x_1}{u_2}(s) = \left(1 - \frac{2}{(s+3)}\right) = \frac{(s+1)}{(s+3)} \tag{5.4}$$

这表明由 u_2 在输入端产生如图所示的零点，它阻止了对 e^{-t} 振型的激发，因而这个振型对于输入 u_2 来说是**不能控的**. 如果施加一个输入 u_1，在 y_a 对 u_1 的传递函数中产生一个零点

$$\frac{y_a}{u_1}(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \tag{5.5}$$

这个零点不与系统的极点相消，因而两个振型都可以被激发(是**能控的**). 对图 5.1 (b) 的系统，两个振型都存在于 $x_b(s)$ 中，因而都可以由任一个输入激发. 然而，组成 $y_b(s)$ 时产生了一个零点

$$y_b(s) = (1+s)x_1(s)$$

这个零点使振型 e^{-t} **不能观测**，因为振型 e^{-t} 存在于 $x_b(s)$ 而不出现在 $y_b(s)$ 中.

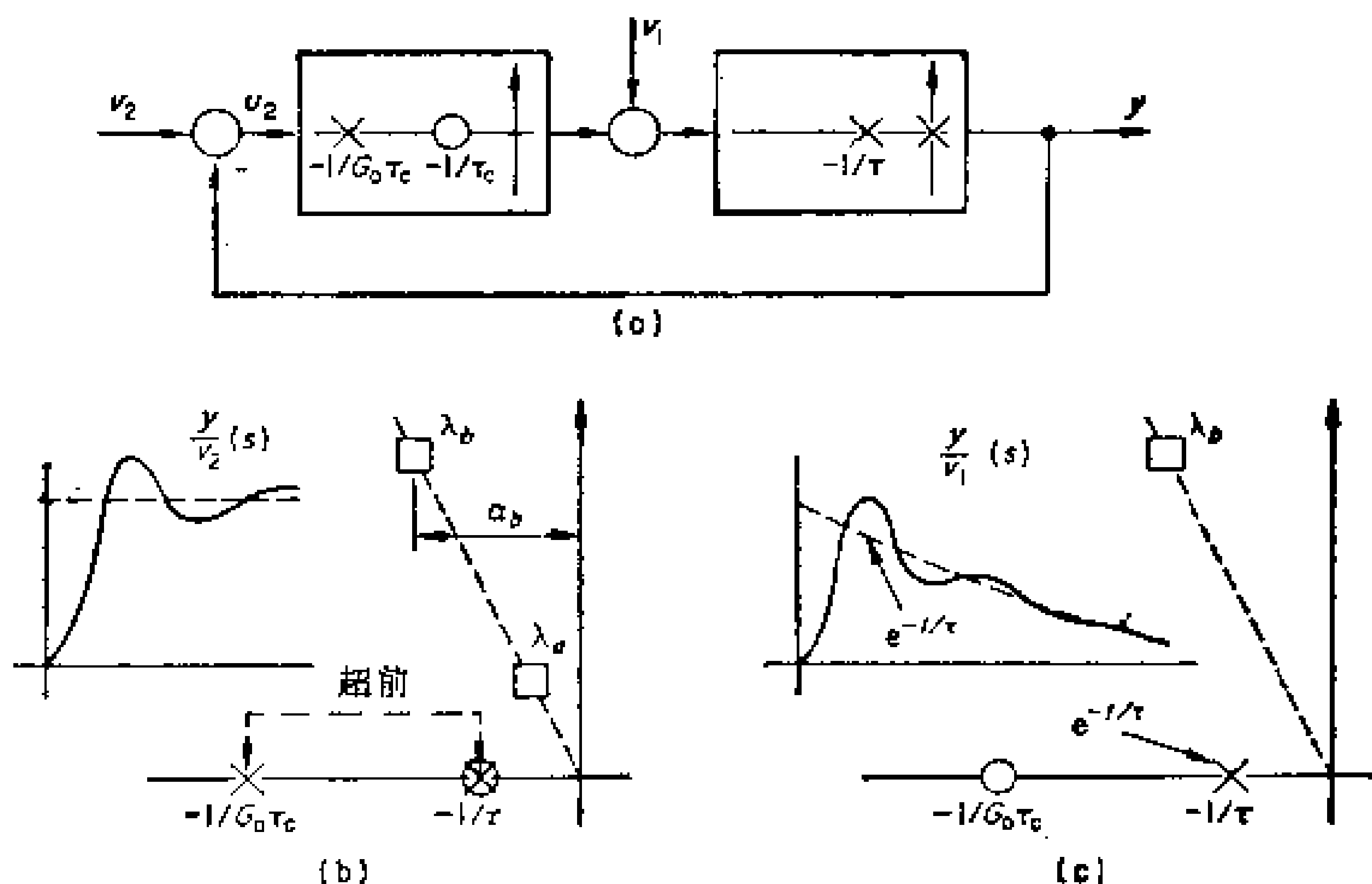


图 5.2 有超前网络的系统：(a) 系统；(b) 对 v_2 处输入的 s 平面；(c) 对 v_1 处输入的 s 平面

这些结果表明，如果在系统设计中存在着零点极点相消，这就意味着，有一个振型是不能控的或不能观测的，其后果就必须加以考虑．图 5.2(a) 是一个例子，它的前向通道传递系数为

$$\frac{K}{s(s\tau+1)}$$

并可能有相位超前补偿

$$\frac{G_0(1+s\tau_c)}{(1+sG_0\tau_c)}$$

如果不加补偿，可以得到有适当阻尼系数的闭环极点 λ_a 和 $\bar{\lambda}_a$（图 5.2(a)）．加上补偿后，使相位超前的零点和前向通道在 $-\frac{1}{\tau}$ 处的极点相消，得

$$\frac{y}{u_2}(s)=\frac{G_0K}{s(1+sG_0\tau_c)} \tag{5.6}$$

这时可以使闭环极点移到 λ_b 和 $\bar{\lambda}_b$ 处，对响应时间有显著的改善．由于相消，极点 $-1/\tau$ 对于输入 u_2 是不能控的；极点 $-1/\tau$ 不出现在 y 对 v_2 的传递函数中，但却存在于 y 对 v_1 的传递函数中．

$$\begin{aligned}\frac{y}{v_2}(s)&=\frac{G_0K}{(s^2G_0\tau_c+s+KG_0)},\\ \frac{y}{v_1}(s)&=\frac{K(sG_0\tau_c+1)}{(s\tau+1)(s^2G_0\tau_c+s+KG_0)}\end{aligned} \tag{5.7}$$

因此，如果说由 v_2 输入的阶跃响应具有由 $-\alpha_b$ 决定的衰减的话，则由于极点 $-1/\tau$ 的影响，在 v_1 处的干扰输入所引起的响应就拖

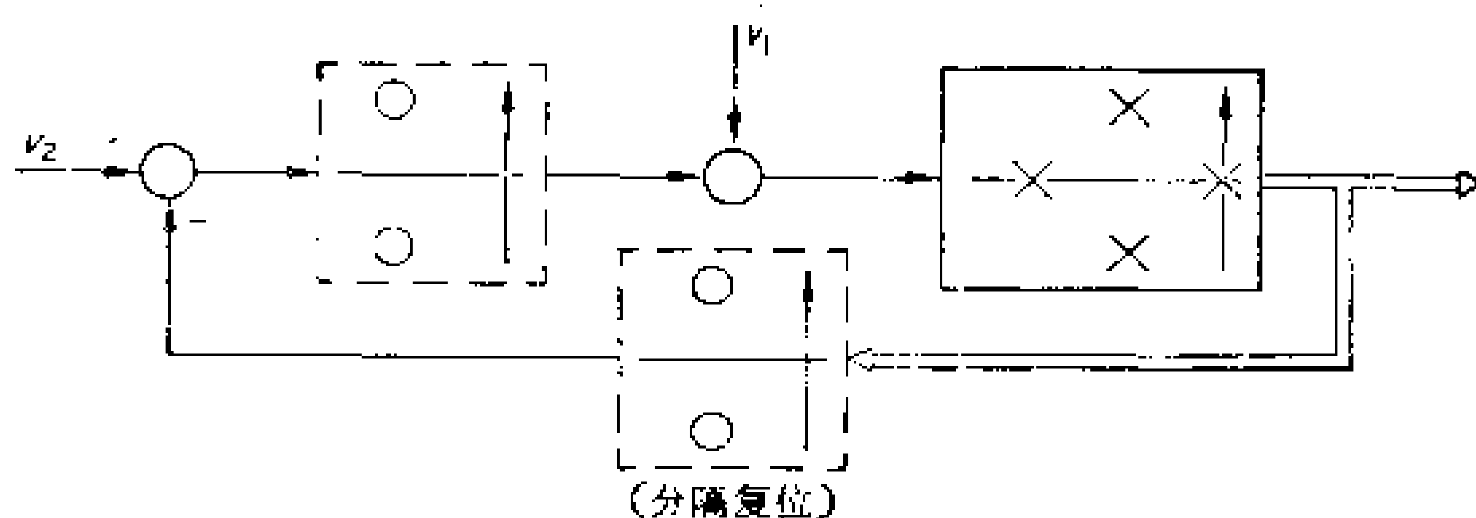


图 5.3　有谐振和分隔复位的系统的零点极点对消

得很长.

另一个例子是已经在第 3.2 节中(图 3.7) 讨论过的,在前向通道中具有谐振振型的系统(图 5.3). 如果采用分隔复位的方法(见式 (3.44)),这就等效于在反馈通道中引进零点去抵消回路内的谐振极点,因而极大地放松了稳定性的条件. 对于这种安排,谐振振型可以由正常的输入 v_2 激发(是能控的), 如果阻尼小, 这可能是不合乎要求的. 另一种做法是,在前向通道中,可以用一个适当的网络引进复数零点,它也与回路内的谐振振型相消,亦即阻止了 v_2 的激发作用. 但是来自 v_1 的干扰仍要激发起这个谐振振型.

这两个例子说明,虽然零点极点相消可能是方便的(如具有相位超前网络那样), 或是系统设计的一个重要部分 (如在谐振系统中),但是被相消的振型仍然存在于系统中. 虽然它对指定的输入是不能控的, 但却可以被其他处的输入所激发. 合理的设计方法是重新配置所有的极点. 而如果有某个极点被零点相消了, 这个极点就不能通过反馈来改变其位置. 因此, 如果需要通过反馈来改变某个振型,那么这个振型在回路中必须是能观测的和能控的.

5.2 状态能控性

为了用状态变量分析法更严谨地研究能控性问题, 现在来讨论图 5.4 的,由三个时间常数并联组成的系统;参阅 Elgerd (1967). 这里的问题是, 能否施加一个适当的输入 $u(t)$, 使状态 $\boldsymbol{x}$ 可以达到任意值. 如果这是可能的,这个系统就称为**完全**能控的;如果这是不可能的, 系统就是不能控的. 为了方便起见, 在以后的讨论中,完全能控的系统将称为能控的系统.

对于这样的系统, $\boldsymbol{x}(t)$ 由一般的关系式给出:

$$\boldsymbol{x}(t) = \int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau \tag{5.8}$$

由于这个系统是三阶的,凯莱-哈密尔顿定理指出

$$e^{\boldsymbol{A}t} = a_0(t)\boldsymbol{I} + a_1(t)\boldsymbol{A} + a_2(t)\boldsymbol{A}^2$$

把这个表达式代入式 (5.8), 由于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是定常的,可把这个表达

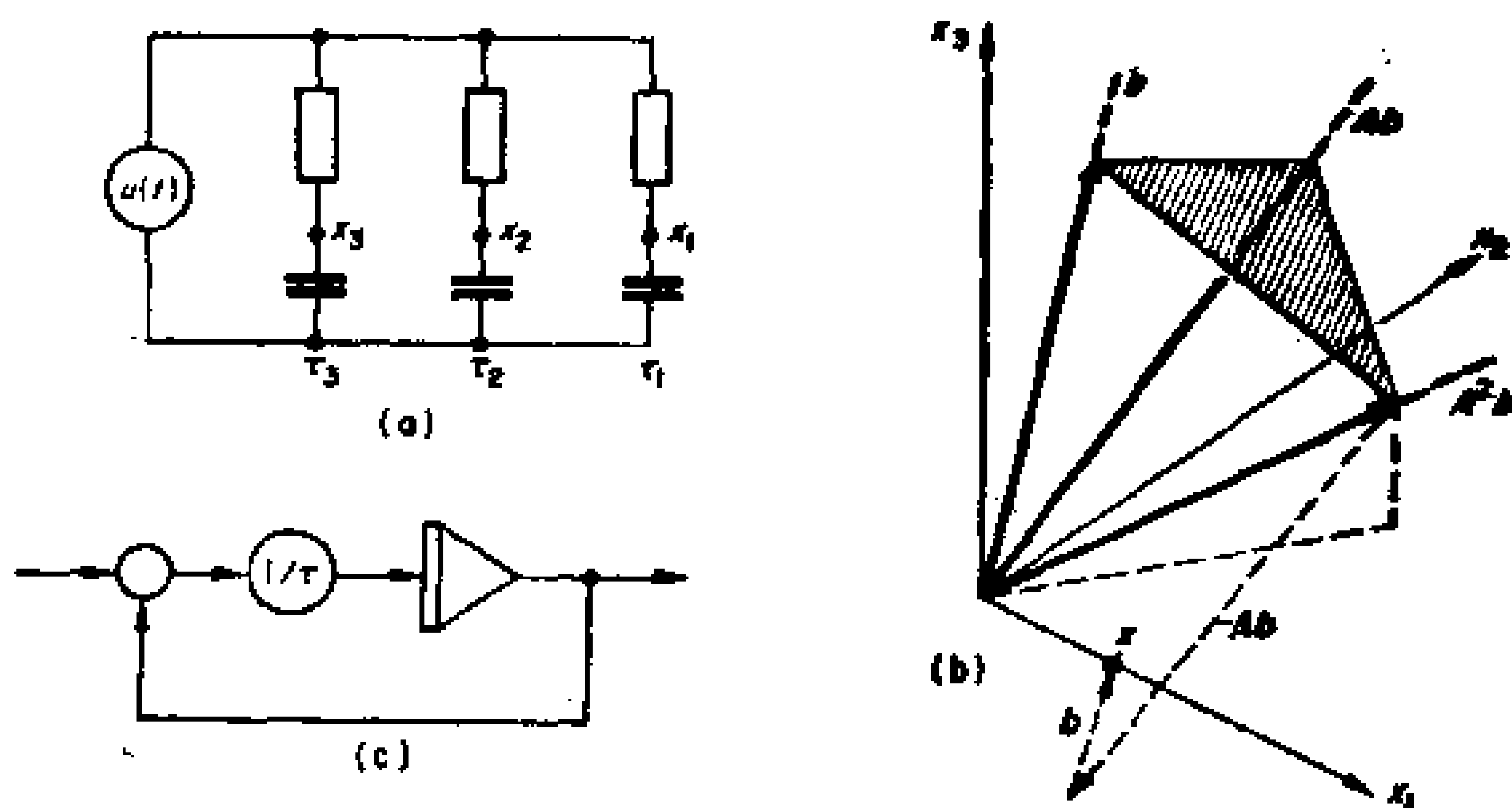


图 5.4 能控性：(a) 系统；(b) 独立方向；(c) 时间常数表示法

式写成

$$x(t) = b\int_0^t a_0(t-\tau)u(\tau)d\tau + Ab\int_0^t a_1(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

$$+ A^2b\int_0^t a_2(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{5.9}$$

在式 (5.9) 中，积分项是标量，故有

$$x(t) = bf_0(t) + Abf_1(t) + A^2bf_2(t) \tag{5.10a}$$

$$= x_0(t) + x_1(t) + x_2(t) \tag{5.10b}$$

$f_0(t)$，$f_1(t)$，$f_2(t)$ 的值取决于 $u(t)$，它们给出了 $x(t)$ 在下列各个方向上的分量．

$$b,\ Ab,\ A^2b \tag{5.11}$$

如果这些方向是独立的（如图 5.4(b) 所示），因而不处在一个平面上，则原则上有可能调整 $u(t)$ 把 $x(t)$ 置于任一点上，即系统是能控的． 图 5.4 (b) 显示了由式 (5.11) 给定的各个方向上的分量的一种可能的选择，以便把状态 x 置于 x_1 轴上． 上述的作法可用矩阵形式表示为

$$x(t) = [b\ Ab\ A^2b]\begin{bmatrix} f_0(t) \\ f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = Pf(t) \tag{5.12}$$

如果 $\boldsymbol{P}$ 是满秩的（对应于各列是独立的），则这个系统是能控的，并可求 $\boldsymbol{P}$ 的逆阵，得

$$\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}(t) \tag{5.13}$$

这样，就能够得到对应于给定 $\boldsymbol{x}(t)$ 的 $\boldsymbol{f}(t)$ 值．由于 $\boldsymbol{f}(t)$ 各分量都是 $u(t)$ 的积分关系式，故对应的 $u(t)$ 就不是唯一的．

可以把图 5.4(a) 的系统中每个时间常数都表示为图 5.4(c) 的形式，这就得到状态向量表达式：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-1/\tau_1 & 0 & 0\\ 0 & -1/\tau_2 & 0\\ 0 & 0 & -1/\tau_3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1/\tau_1\\ 1/\tau_2\\ 1/\tau_3\end{bmatrix}u \tag{5.14}$$

并可得到

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1/\tau_1 & -(1/\tau_1)^2 & (1/\tau_1)^3\\ 1/\tau_2 & -(1/\tau_2)^2 & (1/\tau_2)^3\\ 1/\tau_3 & -(1/\tau_3)^2 & (1/\tau_3)^3\end{bmatrix}=[\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3] \tag{5.15}$$

如果所有时间常数互不相同，则系统是能控的．如果有两个时间

振型的能控性

上面我们用系统的状态讨论能控性问题，得到了一些结果。但是，如下文所述，如果系统是能控的，则所有的固有振型都可以被激发；如果系统是不能控的，某些固有振型就不能被激发.

如果在式(5.16)中引进典型系统，就可以把 $\boldsymbol{P}$ 写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} &= [\boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{W}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{W}\boldsymbol{\Lambda}^2\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{b}\cdots] \\ &= \boldsymbol{W}[\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{\Lambda}^2\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{b}\cdots]\end{aligned} \tag{5.19}$$

如果把 $\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{b}$ 表示为

$$\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} r_1^T \\ \vdots \\ r_n^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{g} \tag{5.20}$$

则

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{W}[\boldsymbol{g}\ \ \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{g}\ \ \boldsymbol{\Lambda}^2\boldsymbol{g}\cdots] = \boldsymbol{W}\boldsymbol{P}_\Lambda \tag{5.21}$$

$\boldsymbol{g}$ 的各个分量控制着典型系统中各个固有振型的激发，当某一分量为零时，相应的振型就不能由输入来激发. 如果 $\boldsymbol{g}$ 的某一分量为零，$\boldsymbol{P}_\Lambda$ 就有一行为零，且其秩为 $(n-1)$，它将使 $\boldsymbol{P}$ 的秩也变为 $(n-1)$. 如果 $\boldsymbol{g}$ 还有一些分量是零，那么 $\boldsymbol{P}$ 的秩就还要减少. 这表明了一般的结论：$\boldsymbol{P}$ 的秩等于能控振型的个数.

对于多个输入的情况(式(5.18))

$$\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{B}\ \mid\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\ \mid\ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\ \mid\ \cdots]$$

引进典型系统，可得

$$\boldsymbol{P}_\Lambda = [\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2\cdots \mid \boldsymbol{\Lambda}[\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2\cdots] \mid \boldsymbol{\Lambda}^2[\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2\cdots] \mid \cdots] \tag{5.22}$$

式中，$\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2$，$\cdots$给出由各个输入引起的激发. 如果 $\boldsymbol{P}_\Lambda$ 是满秩的，因而 $\boldsymbol{P}$ 也是满秩的，则所有的振型至少对一个输入是能控的. 如果 $\boldsymbol{P}_\Lambda$ 不满秩因而 $\boldsymbol{P}$ 也不满秩，则对任何输入都不能控的振型的数目等于秩所缺少的数目.

对具有多重(耦合的)特征值的系统来说，为了使多重特征值在系统中能控，典型系统中的多重特征值链的第一个积分器必须是能控的.

脉冲类输入和能控性

上文中讨论能控性概念时，并没有指定输入 $u(t)$ 的形式．另一种有启发性的方法是通过讨论系统对脉冲信号和有关信号的响应来推导出同样的结论(参阅附录 1 关于脉冲类信号的分析)．

如果对一个一般的系统加入单个脉冲，设系统状态方程是

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u;\ u = k_0\delta(t) \tag{5.23}$$

这个脉冲将通过 $\boldsymbol{b}$ 分配并积分，得出

$$\boldsymbol{x}_0(0_+) = \boldsymbol{b}k_0 \tag{5.24}$$

如果加入二重脉冲 $k_1\delta'(t)$，则在所有积分器的输出端出现脉冲，得到

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}k_1\delta(t) \tag{5.25}$$

这些脉冲将通过系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分配并再次积分，得出

$$\boldsymbol{x}_1(0_+) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}k_1 \tag{5.26}$$

如果加入三重脉冲 $k_2\delta''(t)$，系统内部将产生二重脉冲，从而导出

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}k_2\delta'(t) \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}k_2\delta(t) \rightarrow \boldsymbol{x}_2(0_+) = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}k_2 \tag{5.27}$$

综合上述各项结果，有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(0_+) &= \boldsymbol{x}_0(0_+) + \boldsymbol{x}_1(0_+) + \boldsymbol{x}_2(0_+) \\ &= \boldsymbol{b}k_0 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}k_1 + \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}k_2 \end{aligned} \tag{5.28}$$

写成矩阵形式

$$\boldsymbol{x}(0_+) = [\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}]\begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{k} \tag{5.29}$$

式中，$\boldsymbol{P}$ 就是前面求得的能控性矩阵(式(5.12))；它的各列分别代表用各种脉冲类输入时可以驱动系统状态变化的方向．应用关系式 (5.20) 和 (5.22)，也可以讨论脉冲类输入对典型系统的影响问题．在典型系统中，输入在各个单独的振型发生器内往复循环以得出最终的常数值，产生下列结果：

$$k_0\delta(t) \rightarrow d_0(0_+) = \boldsymbol{g}k_0$$

$$k_1\delta'(t) \to d_1(0_+) = \Lambda g k_1$$
$$k_2\delta''(t) \to d_2(0_+) = \Lambda^2 g k_2$$

或

$$d(0_+) = [g \quad \Lambda g \quad \Lambda^2 g \cdots] \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = P_\Lambda k$$

如果 P 是满秩的，则使系统获得任一状态所要求的输入序列可以由下式求出：

$$k = P_\Lambda^{-1} d(0_+) \tag{5.30}$$

以图 5.5 的系统为例：

$$A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -1 \\ a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = [b_1 \quad b_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.31}$$

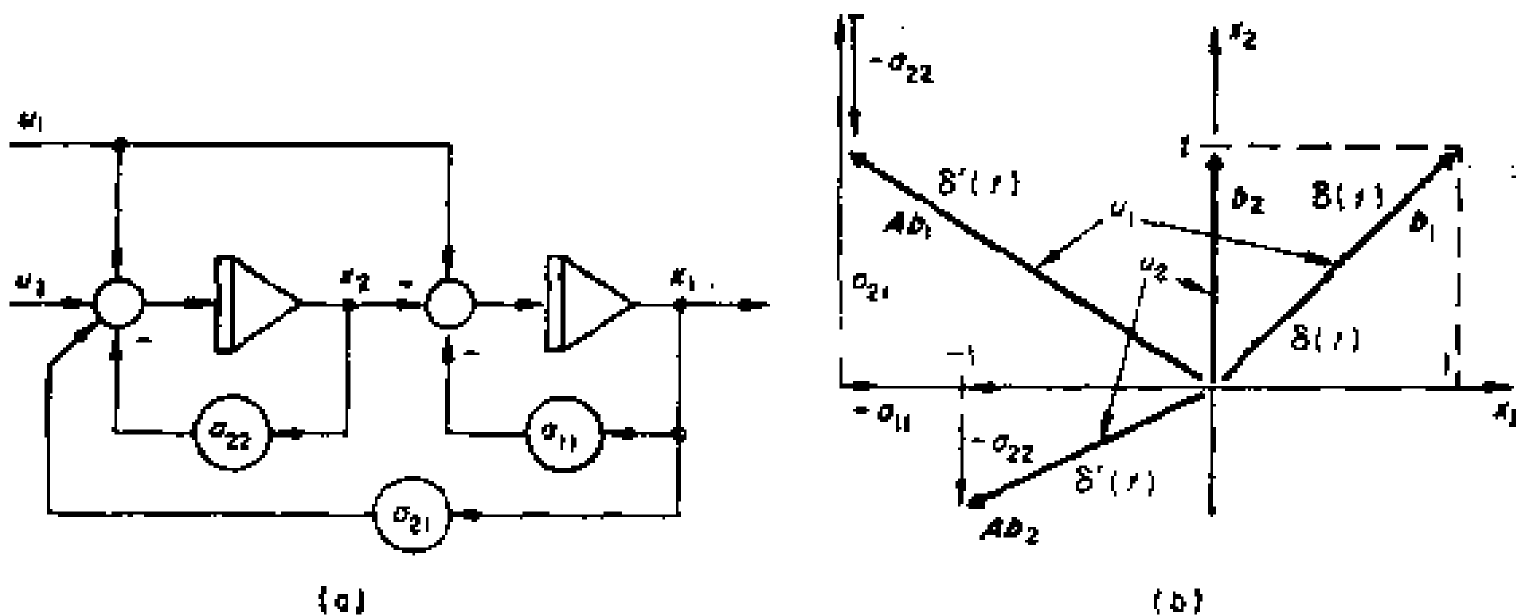


图 5.5　能控性：(a) 系统；(b) 脉冲响应

由图，在 u_1 点加入单位脉冲的影响是

$$u_1 = \delta(t) \to x_1(0_+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = b_1 \tag{5.32}$$

如图 5.5 (b) 所示．如果在 u_1 端加入二重单位脉冲 $\delta'(t)$，在 x_1 和 x_2 处将产生脉冲．x_1 处的脉冲通过 $-a_{11}$ 循环并积分，最终在 x_1 处产生一个负的阶跃，同理使在 x_2 处产生一个正的阶跃 a_{21}．x_2 处的脉冲最终在 x_2 处产生 $-a_{22}$ 阶跃并在 x_1 处产生 -1 阶跃．这些结果（同样表示在图 5.5 b 中）引出下面的关系：

$$u_1 = \delta'(t) \to \boldsymbol{x}_2(0_+) = \begin{bmatrix} -(1+a_{11}) \\ a_{21} - a_{22} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1 \tag{5.33}$$

由式 (5.32) 和式 (5.33) 得到

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -(1+a_{11}) \\ 1 & (a_{21} - a_{22}) \end{bmatrix} \tag{5.34}$$

由于 $\boldsymbol{P}_1$ 矩阵的各列是独立的，所以系统是能控的．图 5.5 b 还表示出对 u_2 输入的脉冲响应向量．可以验证，由系统的方块图可导出这些向量，它们与 $\boldsymbol{P}_2$ 的列相一致．

由图 5.5 (b)，当满足关系式

$$(1 + a_{11}) = a_{22} - a_{21} \tag{5.35}$$

时，对 u_1 的响应向量 ($\boldsymbol{P}_1$ 的列)排成一条直线，系统就变成不能控的．正如对图 5.1 (a) 的系统进行推导那样，建议读者借助零点极点相消来验证这个结果．此外，从对 u_2 输入的脉冲响应向量来看，对任意(有限的) a_{22}，系统是能控的．

5.3 能观测性

如果由系统的输出 $\boldsymbol{y}$ 可以确定状态 $\boldsymbol{x}$，则此系统是**完全**能观测的．为方便起见，在以后的讨论中，一个完全能观测的系统将简称为能观测的系统．如果

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

式中，$\boldsymbol{C}$ 是满秩方阵，则对 $\boldsymbol{C}$ 求逆阵可得到 $\boldsymbol{x}$，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}$$

但是，对于

$$y = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

这样的一维向量输出的一般情况，不能对 $\boldsymbol{c}^T$ 求逆以得到 $\boldsymbol{x}$．根据几何学的观点，对于输出为

$$y = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

的三维系统，输出的一个特定值

$$y_k = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \tag{5.36}$$

确定了 $\boldsymbol{x}$ 空间中一个平面，对于该平面上的任一点，输出值都是 y_k. 任意一个 y 值都对应于 $\boldsymbol{x}$ 空间中的一个平面（各平面相互平行，对应于不同的 y 值），而 y 和 $\boldsymbol{x}$ 之间并没有唯一的对应关系. 特别是对应于 $y=0$ 的是一个通过 $\boldsymbol{x}$ 原点的平面，作为一种特殊情况，如果系统的轨迹，在这个平面上，则

$$y = 0$$

因而在输出端就不能检测到系统的轨迹. 如果有任何特征向量处在这个平面上，相应的振型就是不能观测的.

能使 y 确定 x 的附加信息是通过对 y 的逐次求导而得，即

$$\begin{aligned} \dot{y} &= c^T\dot{x} = c^T A x \\ \ddot{y} &= \boldsymbol{c}^T\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{5.37}$$

每一个特定的 $\dot{y}$ 或 $\ddot{y}$ 值都在 $\boldsymbol{x}$ 空间中确定一个平面. 一般来说，由 y, $\dot{y}$ 和 $\ddot{y}$ 的特定值所确定的三个平面在 $\boldsymbol{x}$ 空间中相交于一点，这一点就确定了唯一的状态值 $\boldsymbol{x}_k$. 上述的关系用矩阵形式可表示为

$$\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^T \\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A}^2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \tag{5.38}$$

这个表达式可以解释为把 $\boldsymbol{x}$ 转换到坐标轴为 y, $\dot{y}$, $\ddot{y}$ 的 $\boldsymbol{y}$ 空间。如果 $\boldsymbol{Q}$ 满秩，并假定 y 和它的导数可以测定，则可得到 $\boldsymbol{x}$ 为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}^{-1}\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} \tag{5.39}$$

如果 $\boldsymbol{Q}$ 不满秩，$\boldsymbol{x}$ 将被转换到 $\boldsymbol{y}$ 空间的一个平面上（或一直线上），致使 y, $\dot{y}$ 和 $\ddot{y}$ 是相关的，此时对于一组给定的 y, $\dot{y}$ 和 $\ddot{y}$，我们不能把它们反转换到 $\boldsymbol{x}$ 去，以求得唯一的 $\boldsymbol{x}$. 对于 n 维系统来说，需要高达 $(n-1)$ 次的导数，即

$$\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^T \\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A}^{n-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \tag{5.40}$$

如果 Q 满秩，系统就是能观测的，虽然对高维的情况不能作出几何学的解释. 对于有几个输出的系统，可以用各输出信息的组合求得 Q 矩阵. 例如，

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1^T \\ \boldsymbol{c}_2^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{5.41}$$

则

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1^T \\ \boldsymbol{c}_2^T \\ \boldsymbol{c}_1^T\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{A} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \tag{5.42}$$

如果 Q 是可逆的，就可求得 $\boldsymbol{x}$.

如果在式 (5.40) 引入典型系统，有

$$\begin{aligned} y &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{W}\boldsymbol{d} \\ \dot{y} &= \boldsymbol{c}^T\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{W}\dot{\boldsymbol{d}}=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{d} \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Lambda}^{n-1}\boldsymbol{d} \end{aligned} \tag{5.43}$$

则可以求得矩阵 Q 为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Lambda} \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Lambda}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{5.44}$$

如果 Q 满秩，求它的逆阵就可得到 $\boldsymbol{d}$. 由于

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{W}=\boldsymbol{c}^T[\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_2\cdots\boldsymbol{w}_n]$$

如果有任一个

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{w}_k=0 \tag{5.45}$$

这就意味着固有振型 λ_k 不会出现在输出 y 中，并使矩阵 Q 的一个列为零，因而不能从 y 和 y 的导数求得 $\boldsymbol{d}$. 因此，振型 λ_k 是不能观测的，即系统是不能观测的. 虽然前面在理论推导时引用了输出的各阶导数，但实际上，由于噪声影响，应避免取微分，而应使用观

测器（5.6 节）以取得附加的信息.

作为上述的一般结果，可以像图 5.6 那样把系统分解成四部分，图中各部分是

$S(c0)$：能控和能观测的

$S(c\bar{0})$：能控但不能观测的

$S(\bar{c}0)$：不能控但能观测的

$S(\bar{c}\bar{0})$：不能控和不能观测的

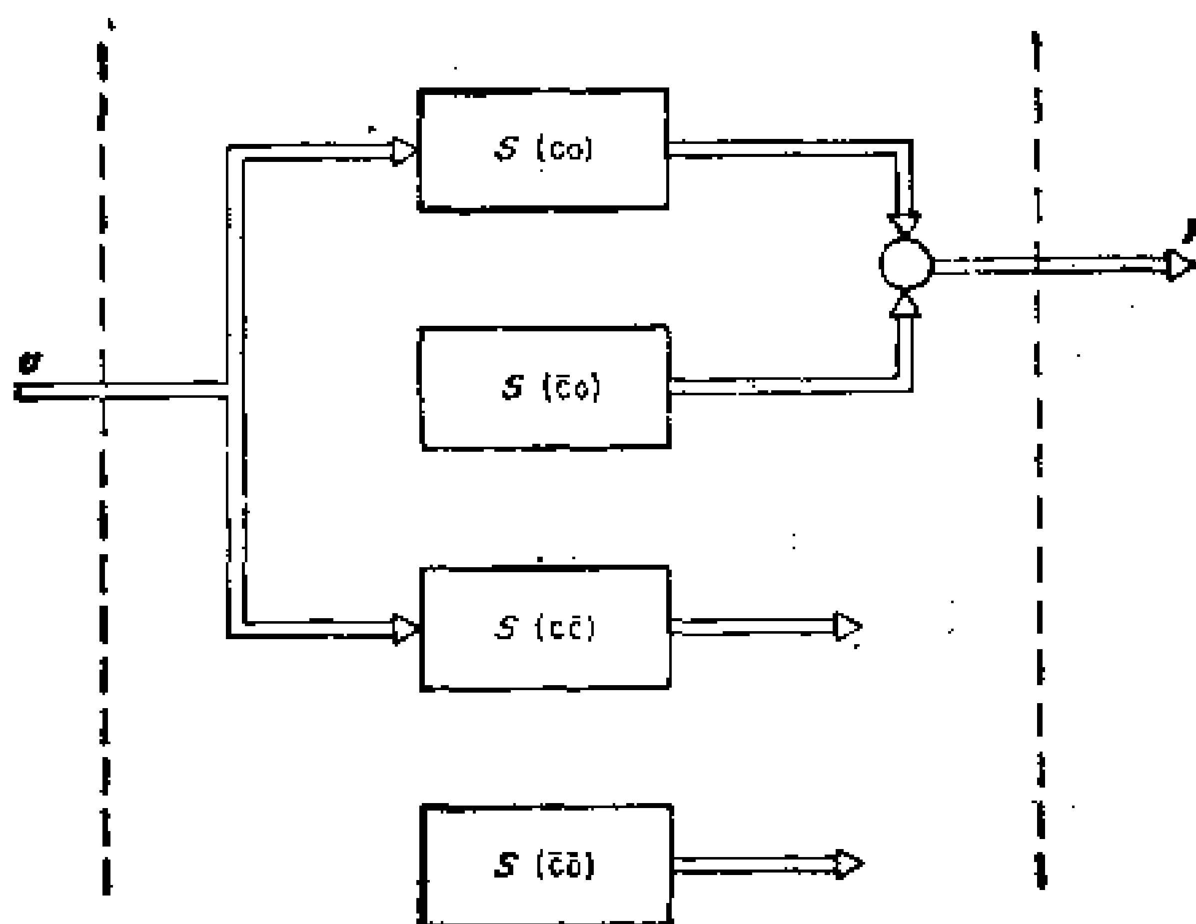


图 5.6　系统的组成．$S(c0)$：能控和能观测的；$S(\bar{c}0)$：不能控但能观测的；$S(c\bar{0})$：能控但不能观测的；$S(\bar{c}\bar{0})$：不能控和不能观测的

传递函数仅仅给出了系统的能控和能观测部分的信息，而状态变量描述方法还给出了关于系统不能控的和不能观测的部分信息.

5.4　能控性和能观测性举例

对于图 5.1 a 所示的系统

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix},\quad W=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix},\quad W^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$y_a = [1 \quad 0]\boldsymbol{x} \tag{5.46}$$

特征值为 −1，−2 且

$$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{b}_1 \ \boldsymbol{b}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \tag{5.47}$$

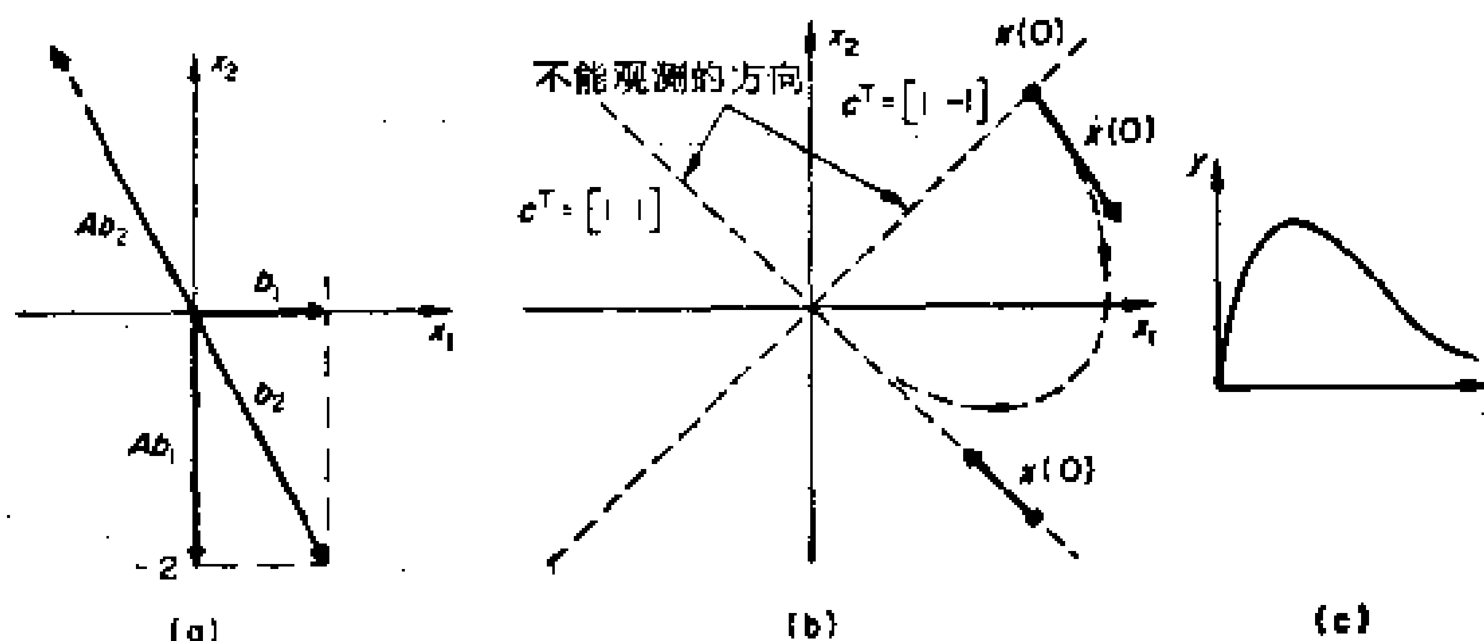


图 5.7　图 5.1 所示系统的能控性和能观测性：(a) 图 5.1(a) 系统的能控性向量；(b) 图 5.1 (b) 系统的能观测性

对于每个输入，能控性矩阵 P 为

$$\boldsymbol{P}_1 = [\boldsymbol{b}_1 \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_2 = [\boldsymbol{b}_2 \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_2] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \tag{5.48}$$

式中，$\boldsymbol{P}_1$ 是满秩的，因此系统对 u_1 是能控的；$\boldsymbol{P}_1$ 的两个列向量示于图 5.7(a)．相反，$\boldsymbol{P}_2$ 的秩为 1；它的两个列向量在图 5.7 (a) 中处于同一直线上，因为

$$\boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} [1 \quad -2] \tag{5.49}$$

所以系统对 u_2 是不能控的．

考虑典型系统，这时

$$\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.50}$$

因此对于 u_1 两个振型都是能控的，而对于 u_2 仅特征值为 −2 的振

型是能控的. 能观测性矩阵是

$$Q=\begin{bmatrix}c^T\\c^TA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \tag{5.51}$$

这是个满秩阵,如所预料的一样,系统是能观测的. 同样,从典型系统来讨论,可以由下式确定振型的能观测性:

$$c^TW=[1\ \ 0]\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -2\end{bmatrix}=[1\ \ 1] \tag{5.52}$$

这说明两个振型都是能观测的.

对于图 5.1 (b) 所示的系统, A, W 和 W^{-1} 都与式(5.46)一样,而 y_b 和 B 为

$$y_b=[1\ \ 1]x;\ B=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \tag{5.53}$$

它的能控性矩阵

$$P_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{bmatrix};\ P_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -3\end{bmatrix} \tag{5.54}$$

都是满秩的,表明系统对两个输入都是能控的. 同时

$$W^{-1}B=\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix} \tag{5.55}$$

说明两个振型都可以被任何一个输入所激发,这是可以预料到的.

系统的能观测性矩阵

$$Q=\begin{bmatrix}1 & 1\\-2 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}[1\ \ 1] \tag{5.56}$$

的秩为 1 ,因此有一个振型是不能观测的. 同时因为

$$c^TW=[1\ \ 1]\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -2\end{bmatrix}=[0\ \ -1] \tag{5.57}$$

所以只有 $\lambda=-2$ 的振型是能观测的. 由于本例中

$$y_b=c^Tx=x_1+x_2 \tag{5.58}$$

所以沿着直线

$$x_1=-x_2$$

系统是不能观测的 (在图 5.7 (b) 中用虚线表示), 这条直线与

$\lambda=-1$ 的特征向量重合，因此由处于这条线上的初始条件出发的轨迹将是不能观测的．如果

$$c^T=[1 \quad -1] \tag{5.59}$$

则沿直线

$$x_1=x_2$$

系统是不能观测的，这条直线不是特征向量，因而没有一条可能的轨迹与之对应．如果 $x(0)$ 处于这条线上，则

$$\dot{x}(0)=Ax(0)=\begin{bmatrix}1\\-5\end{bmatrix} \tag{5.60}$$

如图 5.7 (b) 所示，虽然 $y(0)=0$，但轨迹仍是能观测的．$y(t)$ 的一般形状如图 5.7 (c) 所示，它可由该轨迹推演而得到．

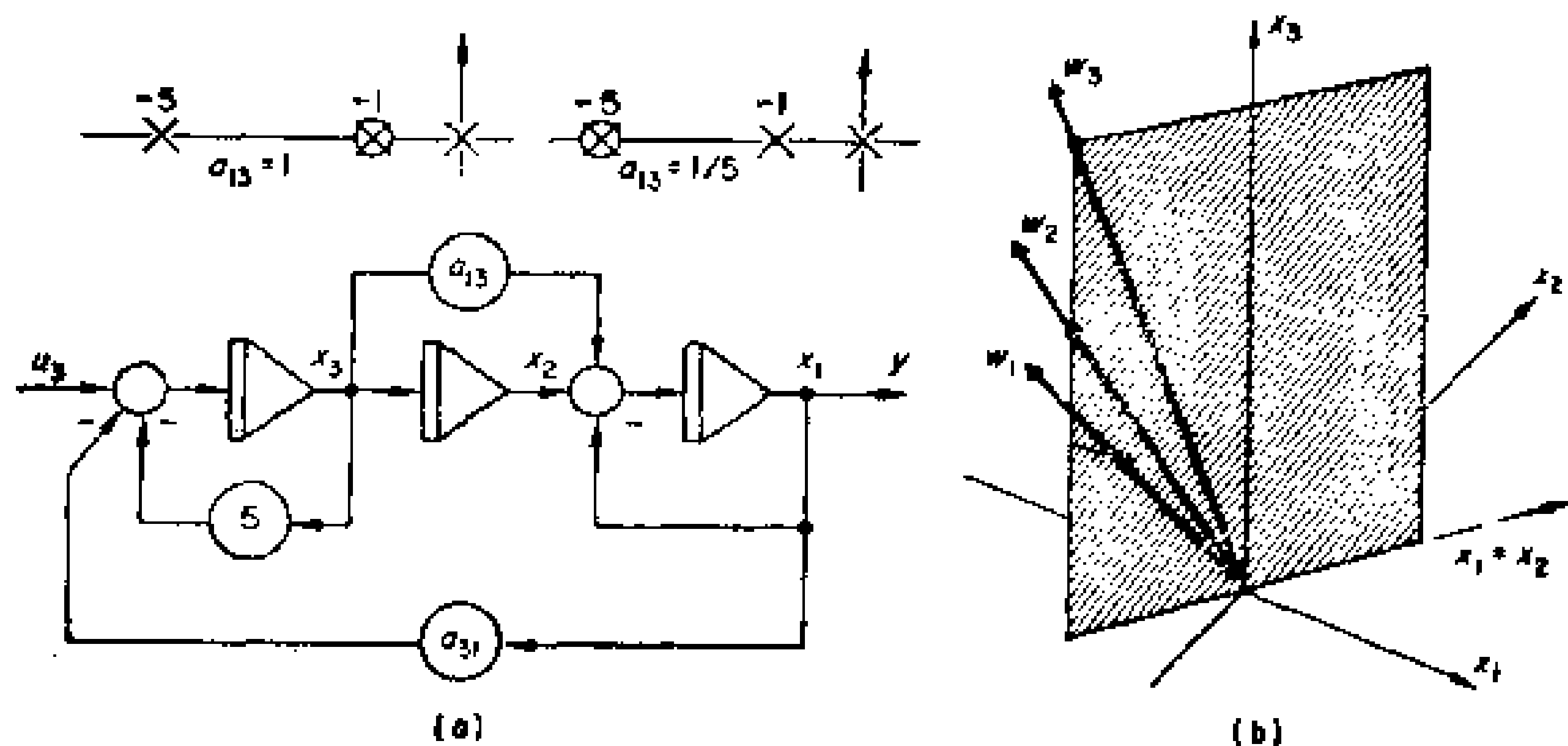


图 5.8 三阶系统的能控性：(a) 系统；(b) 能控平面

对于图 5.8 所示的系统有

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & a_{13}\\ 0 & 0 & 1\\ -a_{31} & 0 & -5\end{bmatrix};\ b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};\ c^T=[1\ 0\ 0] \tag{5.61}$$

能控性矩阵为

$$P=[b\ Ab\ A^2b]=\begin{bmatrix}0 & a_{13} & 1-6a_{13}\\ 0 & 1 & -5\\ 1 & -5 & 25-a_{13}a_{31}\end{bmatrix} \tag{5.62}$$

考察各阶行列式可检验 $\boldsymbol{P}$ 的秩，即

$$\Delta_1(\boldsymbol{P}) \neq 0;\ \Delta_2(\boldsymbol{P}) \neq 0;\ \Delta_3(\boldsymbol{P}) = (a_{13} - 1) \tag{5.63}$$

当 $a_{13} = 1$ 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩为 2，有一个振型不能控；这一结论与回路增益 a_{31} 无关. 在此系统中，由于 a_{13} 和 x_2 积分器并联相消的结果，在

$$s = -1/a_{13} \tag{5.64}$$

处产生一个零点. 在前向通道中这个零点位于 $a_{11} = -1$ 产生的 -1 极点前面，因此当 $a_{13} = 1$ 时，-1 极点是不能控的. 前向通道零极点图示于图 5.8 (a)。此时经由 a_{31} 的反馈不能改变 -1 处的极点，这可以从有反馈的特征方程来证实

$$\det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}] = s\{(s+1)(s+5) + a_{13}a_{31}\} + a_{31} \tag{5.65a}$$

对于 $a_{13} = 1$

$$\det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}] = (s+1)(s^2 + 5s + a_{31}) \tag{5.65b}$$

因 $\boldsymbol{P}$ 的秩为 2，可以用两个向量来表示它

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & -5 & (25 - a_{31}) \end{bmatrix} = \underset{(\boldsymbol{p}_1)\ (\boldsymbol{p}_2)}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a_{31} \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \tag{5.66}$$

任一输入都可以变换为沿 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 方向的分量，$\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 在 $\boldsymbol{x}$ 空间中确定了能控平面（见图 5.8(b)），此平面包含 x_3 轴和直线 $x_1 = x_2$. 对于 $a_{13} = 1$ 和 $a_{31} = 6$，特征值和特征向量为

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -3.$$

$$\boldsymbol{W} = [\boldsymbol{W}_1 \boldsymbol{W}_2 \boldsymbol{W}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1.5 & 1 & 1 \\ -1.5 & -2 & -3 \end{bmatrix} \tag{5.67}$$

它们也示于图 5.8 (b)，图上 $\boldsymbol{W}_1$，$\boldsymbol{W}_2$，$\boldsymbol{W}_3$ 取其相反的方向画出. 因为 λ_1 不能控，系统只在 $\boldsymbol{W}_2$，$\boldsymbol{W}_3$ 所确定的平面内能控，这与式 (5.66) 中的 $\boldsymbol{P}$ 所确定的平面相同.

我们可用 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵研究能观测性

$$Q=\begin{bmatrix}c^T\\c^TA\\c^TA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & a_{13}\\(1-a_{31}a_{13}) & -1 & (1-6a_{13})\end{bmatrix} \quad (5.68)$$

它的秩受下式影响:

$$\Delta_3(Q)=(1-5a_{13}) \quad (5.69)$$

因此当 $a_{13}=1/5$ 时 Q 的秩为 2，系统是不完全能观测的. 在此情况下在 -5 处产生一个零点。此零点出现在 a_{33} 产生的极点 -5 之后，因此极点 -5 是不能观测的. 当 $a_{13}=1/5$ 时，特征方程式是

$$(s+5)(s^2+s+a_{31}15) \quad (5.70)$$

因此这个极点也是不能用反馈使之改变的. 如果

$$y=[1\quad -1\quad 0]x;\quad a_{13}=1,\quad a_{31}=6 \quad (5.71)$$

则系统在 x 的能控平面内是不能观测的。所以对 u_3 的任何可能输入的响应都不可能从输出 y 中检测出来，此时传递函数为

$$\frac{y}{u_3}(s)=0$$

这点可从下式得到验证:

$$c^T[sI-A]^{-1}b=-\frac{[1\quad -1\quad 0]}{(s+1)(s+2)(s+3)}\times\begin{bmatrix}\cdot & \cdot & s+1\\\cdot & \cdot & s+1\\\cdot & \cdot & \cdot\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad (5.72)$$

此式的分子是零. 不能控的 -1 振型在输出端却是能观测的.（参考习题 5.11）

能观测性和能控性之间的关系

能观测性和能控性是对偶的特性。如果研究 S_1，S_2 两个系统，其中 S_1 系统为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=Ax_1+Bu\\y&=Cx_1\end{aligned}\right\} \quad (5.73a)$$

S_2 系统为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_2 &= \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{x}_2\end{aligned}\right\} \tag{5.73b}$$

则任一系统的能观测性问题和另一系统的能控性问题相同．出现这种对偶特性，是因为这两个系统的输入部分和输出部分的行和列的关系刚好互相对调，而这些行和列的关系是确定能观测性和能控性的．关于这一点，可以验证如下．研究有如下矩阵的系统：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

此处 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 取自式(5.46)和式(5.47)，$\boldsymbol{C}$ 由式(5.46)和式(5.53)中的 y_a 和 y_b 组成．如果认为此系统是式(5.73a)的 S_1，则当写成式(5.73 b)的形式时，能控性和能观测性问题就相互转化了．

作为一个特殊的情况，传递函数表示为式(3.5)和图 3.1 (a)的形式时叫做**能控的典型形式**．如果进行转置得到式(3.9)和图 3.1(c)，则是**能观测的典型形式**．可以验证，由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^T$ 的形式（譬如说一个 3×3 阶的例子），相应的 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵是满秩的．

5.5 输出能控性

前面我们已经研究了系统状态的能控性，但有时可能还需要研究输出 $\boldsymbol{y}$ 的能控性．状态能控性由 $\boldsymbol{P}$ 矩阵的秩来确定：

$$\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{B}\ \ \boldsymbol{AB}\ \ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\cdots]$$

由于一个多维的输出可表为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx}$$

因此输出能控性由下面矩阵的秩来确定：

$$\boldsymbol{P}_0 = [\boldsymbol{CB} \,\vdots\, \boldsymbol{CAB} \,\vdots\, \boldsymbol{CA}^2\boldsymbol{B} \,\vdots\, \cdots] \tag{5.74}$$

如 $\boldsymbol{y}$ 是 m 维的，且矩阵 $\boldsymbol{P}_0$ 的秩为 m，则输出是能控的．如果 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维且 $m < n$，系统虽然不是完全状态能控，但可以是输出能控．另一方面，即使 $\boldsymbol{x}$ 是能控的，$\boldsymbol{y}$ 也可以是不能控的．输出能控性是系

统输入输出关系的一个特性，它决定于传递函数，而状态能控性则是系统状态方程的一个特性.

从式(5.66)可知，图 5.8 所示系统在 $a_{33}=1$ 时有

$$P=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -a_{31}\\ 0 & 1 & -5\end{bmatrix}$$

系统仅在 $\boldsymbol{x}$ 的一个平面内能控. 如果

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \tag{5.75}$$

则

$$\boldsymbol{P}_0=[\boldsymbol{Cb}\ \boldsymbol{CAb}\ \boldsymbol{CA}^2\boldsymbol{b}]=\boldsymbol{CP}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -a_{31}\\ 0 & 1 & -5\end{bmatrix} \tag{5.76}$$

由于上式的方阵是满秩的，因此，即使 $\boldsymbol{x}$ 不能控，输出 $\boldsymbol{y}$ 也是能控的. 从几何上看，这个结果的出现是因为，从式(5.75)得

$$\begin{aligned}y_1&=x_1+x_2+x_3\\ y_2&=x_1+2x_2+x_3\end{aligned} \tag{5.77}$$

且 y_1 或 y_2 的任何一个具体值都在 $\boldsymbol{x}$ 中确定一相应的平面. 每一这样的平面将与系统的能控平面(图 5.8 (b)) 相交于一直线，两条这样的直线将交于一个具体的 $\boldsymbol{x}$ 值，因而在 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 的能控值之间有一一对应的关系. 所以虽然 $\boldsymbol{x}$ 不能控，但 $\boldsymbol{y}$ 是能控的. 如果

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}[1\ \ 1\ \ 1]\,\boldsymbol{x} \tag{5.78}$$

则 $\boldsymbol{y}$ 仅在直线

$$y_1/y_2=1/2$$

上能控. 从几何上来说，这意味着对应于 y_1，y_2 具体值的 $\boldsymbol{x}$ 各平面是互相平行的，而与

$$2y_1=y_2$$

相对应的所有平面重合并切割 x 的能控平面于同一直线.

5.6 观 测 器

状态变量反馈和其它的状态变量设计方法要求所有的系统状态 $x_1, \cdots, x_n$ 都是能用于控制或测量的. 实际上由

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{x}$$

给出的可测量的或者说能观测的系统输出 $\boldsymbol{y}$ (如图 5.9(a) 所示)可能没有包含所有的状态变量，或者不可能将各个状态变量分离出来. 可能由于测量的困难而得不到某些状态变量；例如测量一根轴的转矩这一状态就不容易了. 原则上可以对能得到的输出进行微分或有关的运算来求得隐含状态变量，但是，这样做法会大大加重噪声的影响. 比较实用的方法是采用**观测器**来获取隐含状态的估计值，这个观测器是一个由可得到的输出 $\boldsymbol{y}$ 和系统的输入 $\boldsymbol{u}$ 来驱动的辅助系统.

恒 等 观 测 器

在图 5.9 (b) 所示的系统中，我们把反馈矩阵分写成 $\boldsymbol{C}_1$ 和 $\boldsymbol{F}$，其中 $\boldsymbol{C}_1$ 为图 5.9(a) 系统的输出矩阵，必要时可在矩阵 $\boldsymbol{C}_1$ 中加上全为零的行或列，使它的维数与 $\boldsymbol{A}$ 的维数相同，而 $\boldsymbol{F}$ 则由下式给出：

$$\boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{F} = \boldsymbol{A} \quad 或者 \quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{C}_1 \tag{5.79}$$

于是，如果图 5.9 (a) 和图 5.9 (b) 两个系统同时由 $\boldsymbol{u}$ 激励，则两个系统的状态向量 $\boldsymbol{x}$ 相同，但是，在图 5.9 (b) 中通过 $\boldsymbol{C}_1$ 的反馈量 $\boldsymbol{y}$ 恰是图 5.9 (a) 所示系统的可得到的输出. 因此，可以直接用原来系统的输出 $\boldsymbol{y}$ 作为通过 $\boldsymbol{C}_1$ 的反馈量，如图 5.9 (c) 所示. 辅助系统

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{z} \tag{5.80}$$

是一个观测器. 由于 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$，所以全部状态都可以从观测器的输出得到. 这样的观测器称为**恒等观测器**. 反馈矩阵 $\boldsymbol{F}$ 完全由式 (5.79) 来确定，对于一个二维系统有

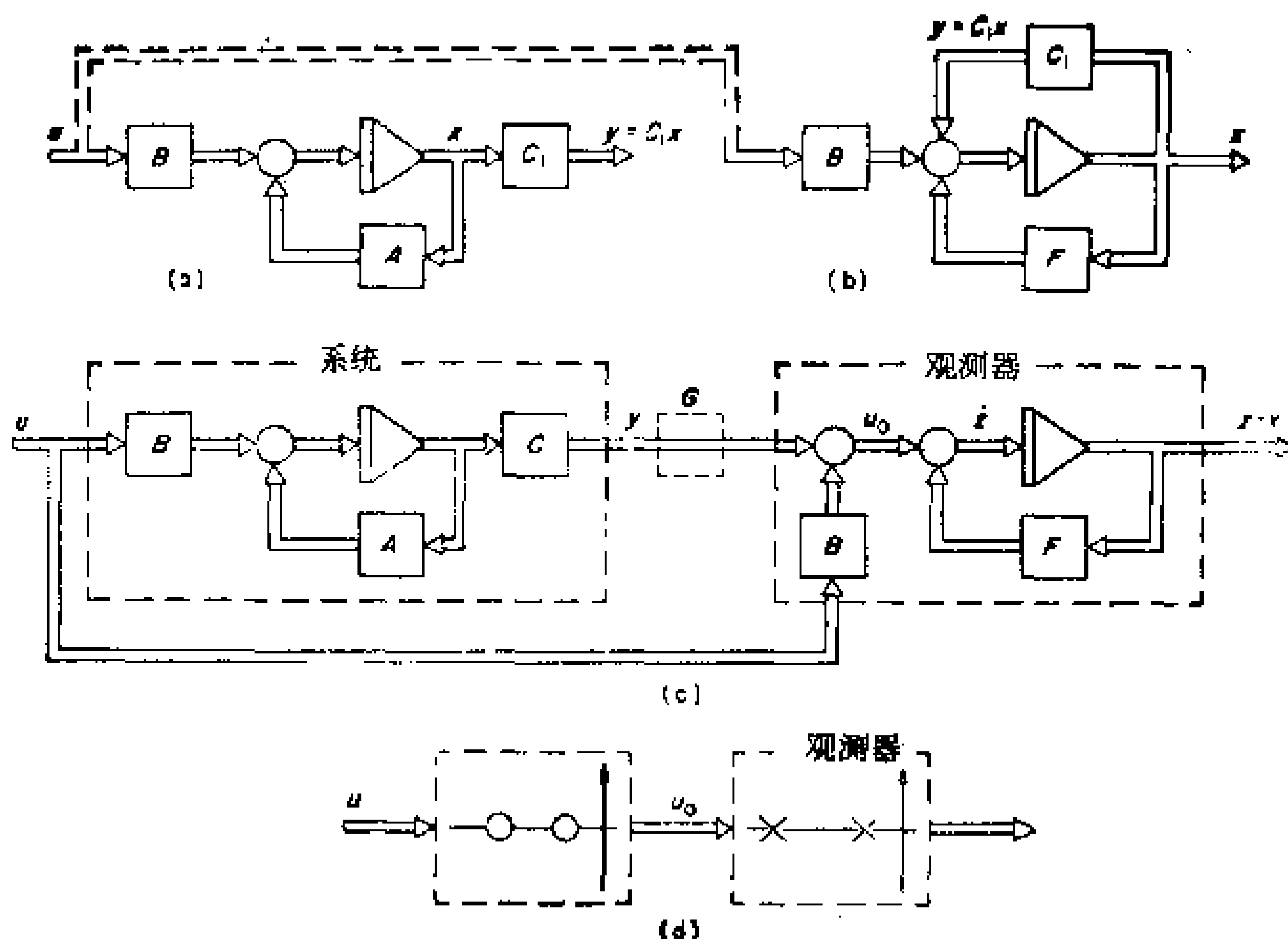


图 5.9 观测器原理：(a) 系统；(b) 具有分路反馈的系统；(c) 系统与观测器；(d) 观测器极零相消

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \tag{5.81}$$

系统的特征值与观测器的特征值是不同的，但当观测器由输入 $\boldsymbol{u}$ 和输出 $\boldsymbol{y}$ 一起激励时，由 $\boldsymbol{u}$ 到观测器输入的两条通道之间的对消作用产生了零点，它们与观测器的极点相消.

图 5.9(c) 所示的整个系统可表达为

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \tag{5.82}$$

由图可以看出，总的传递函数关系式为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(s) \\ \boldsymbol{z}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1} & \boldsymbol{0} \\ [s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}]^{-1}\boldsymbol{C}[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1} & [s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(s) \tag{5.83}$$

由式 (5.83) 可得

$$\boldsymbol{z}(s)=[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}]^{-1}[\boldsymbol{C}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}+\boldsymbol{I}]\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)$$
$$=[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}]^{-1}[\boldsymbol{C}+s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}][s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s) \quad (5.84)$$

上式可整理为

$$\boldsymbol{z}(s)=[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}]^{-1}[s\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{x}(s) \quad (5.85)$$

把式(5.79)代入得到

$$\boldsymbol{z}(s)=[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}]^{-1}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}]\boldsymbol{x}(s) \text{ 或 } \boldsymbol{z}(s)=\boldsymbol{x}(s) \quad (5.86)$$

$[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}]$ 项表示出现在观测器输入 u_0 处的零点，它抵消观测器的极点(如图 5.9 (d) 所示，这是观测器有实数极点的情况). 对于任何输入 $\boldsymbol{u}$，观测器输出 $\boldsymbol{z}$ 都等于系统的状态 $\boldsymbol{x}$. 然而，如果在系统中引入初始条件，则系统的输出激发起观测器的振型，这时在 $\boldsymbol{z}$ 中除有系统的响应外并出现观测器的振型. 由于极点被零点抵消，观测器对 $\boldsymbol{u}$ 来说是不能控的；能控性矩阵是

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & [\boldsymbol{C}+\boldsymbol{F}]\boldsymbol{B} & \cdots & [\boldsymbol{C}+\boldsymbol{F}]^{n-1}\boldsymbol{B}\end{bmatrix} \quad (5.87)$$

由于 $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{F}=\boldsymbol{A}$，所以这个矩阵不是满秩阵.

作为一个简单的例子，图 5.10 (a) 的系统中有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad (5.88)$$

图 5.10 恒等观测器：(a) 系统；(b) 观测器

即仅可得到一个状态 x_1. 从式(5.79)可知，观测器矩阵是

$$F = A - C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad (5.89)$$

这个矩阵的特征方程有复数极点(见图 5.10(b)),特征方程式是

$$s^2 + 4s + 5 = (s + 2 + j1)(s + 2 - j1) \qquad (5.90)$$

从方块图容易验证下式给出的传递函数是正确的.

$$\frac{x_1}{u}(s) = \frac{z_1}{u}(s); \quad \frac{x_2}{u}(s) = \frac{z_2}{u}(s)$$

并可验证,观测器的组合输入产生复数零点,它们抵消观测器的极点. 整个系统的方程式是

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \hline \dot{z} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ \hline z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad (5.91)$$

由于观测器是不能控的,可以料到,整个系统能控性矩阵的秩为 2.

只有对输入 u 来说,观测器的振型才是被对消的. 而初始条件 $x(0)$ 将在 z 中激发出观测器的振型. 如果系统振型的阻尼与观测器振型的阻尼相差不多的话,这将严重地影响 x 的估值. 在本例中,系统的特征值是 -1 和 -2,观测器振型的衰减系数是 -2,这是不能令人满意的. 这可能是对这种简单的观测器的一个严重的限制,而且由于 F 是由 A 和 C 确定的,不能改变观测器的振型. 但是如果 y 通过一个附加的矩阵 G 才加到观测器去(如图 5.9 (c) 所示),并且使

$$A = F + GC \text{ 或 } F = A - GC \qquad (5.92)$$

那末调整 G 就能够改变观测器的振型,或者,更方便的是,如果我们已指定了观测器的振型,只要系统是能观测的,就可以确定所需要的 G. 如果图 5.10 的观测器振型需要从 $-2+j1$ 改变为(例如) -4, -5,以获得比系统的振型更迅速的衰减,那末

$$GC = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ g_{21} & 0 \end{bmatrix} \qquad (5.93)$$

并且根据式(5.92)，观测器矩阵应为

$$F = A - GC = \begin{bmatrix} -g_{11} & 1 \\ -(2 + g_{21}) & -3 \end{bmatrix} \tag{5.94}$$

由式(5.94)可得观测器的特征方程为

$$(s + g_{11})(s + 3) + 2 + g_{21} = 0 \tag{5.95}$$

并与需要的特征方程

$$(s + 4)(s + 5) = s^2 + 9s + 20 = 0 \tag{5.96}$$

相比较，可求出

$$g_{11} = 6;\ g_{21} = 0$$

由此得

$$F = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \tag{5.97}$$

这就给出了具有所需振型的新的观测器.

降 阶 观 测 器

至今为止所研究的观测器都要产生全部状态变量 $\boldsymbol{x}$，因此它必须具有与原来系统相同的阶数. 然而，一般情况下，可直接由 $\boldsymbol{y}$ 得到系统的一些状态或状态的组合，这样，就有可能使用较低阶的或者**降阶的**观测器来产生足够的补充输出 $\boldsymbol{z}$，而由 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}$ 得到 $\boldsymbol{x}$ 所有的状态分量. 假设由于 $\boldsymbol{C}$ 不是方阵，不能求逆，状态向量 $\boldsymbol{x}$ 不能够由公式

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}$$

直接从 $\boldsymbol{y}$ 得到. 但是，如果能得到状态的另外的组合

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x} \tag{5.98}$$

并且将 $\boldsymbol{T}$ 的行补充到 $\boldsymbol{C}$ 阵，使之成为方阵，那末就有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ \hdashline \boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \hdashline \boldsymbol{T} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \quad 和 \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \hdashline \boldsymbol{T} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ \hdashline \boldsymbol{z} \end{bmatrix} \tag{5.99}$$

由 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 组成的矩阵必须是满秩的. 这意味着矩阵 $\boldsymbol{T}$ 必须没有任何一行与 $\boldsymbol{C}$ 的行线性相关. 通常使用观测器来产生式(5.98)所示的附加分量 $\boldsymbol{z}$，其阶数等于 $\boldsymbol{T}$ 的行数，而小于系统的阶数. 常

见的情况是 $\boldsymbol{C}$ 有如下形式：

$$\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{I}|\boldsymbol{0}] \tag{5.100}$$

这就得到

$$\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{I}\,|\,\boldsymbol{0}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \cdots\\ \boldsymbol{x}_2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \cdots\\ \boldsymbol{x}_2\end{bmatrix} \tag{5.101}$$

式中，$\boldsymbol{x}_1$ 是可以直接测量的状态，而 $\boldsymbol{x}_2$ 是不能测量的状态．如果

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{T}_1\,|\,\mathbf{I}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\end{bmatrix} \tag{5.102}$$

这里选的 $\boldsymbol{T}$ 阵使 $\boldsymbol{z}$ 直接包含不能测量的状态 $\boldsymbol{x}_2$，则将式（5.102）展开并移项，注意到 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1$，可得

$$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{z} - \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{y} \tag{5.103}$$

为了研究降阶观测器的设计，我们来考虑一个稍加变更的恒等观测器，如图 5.11 所示（虚线通道可以先不考虑）．从 $\boldsymbol{u}$ 到 $\boldsymbol{z}$ 的传递函数为

$$\boldsymbol{z}(s) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}(s) = [s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}]^{-1}[\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{J}]\boldsymbol{u}(s) \tag{5.104}$$

如果令

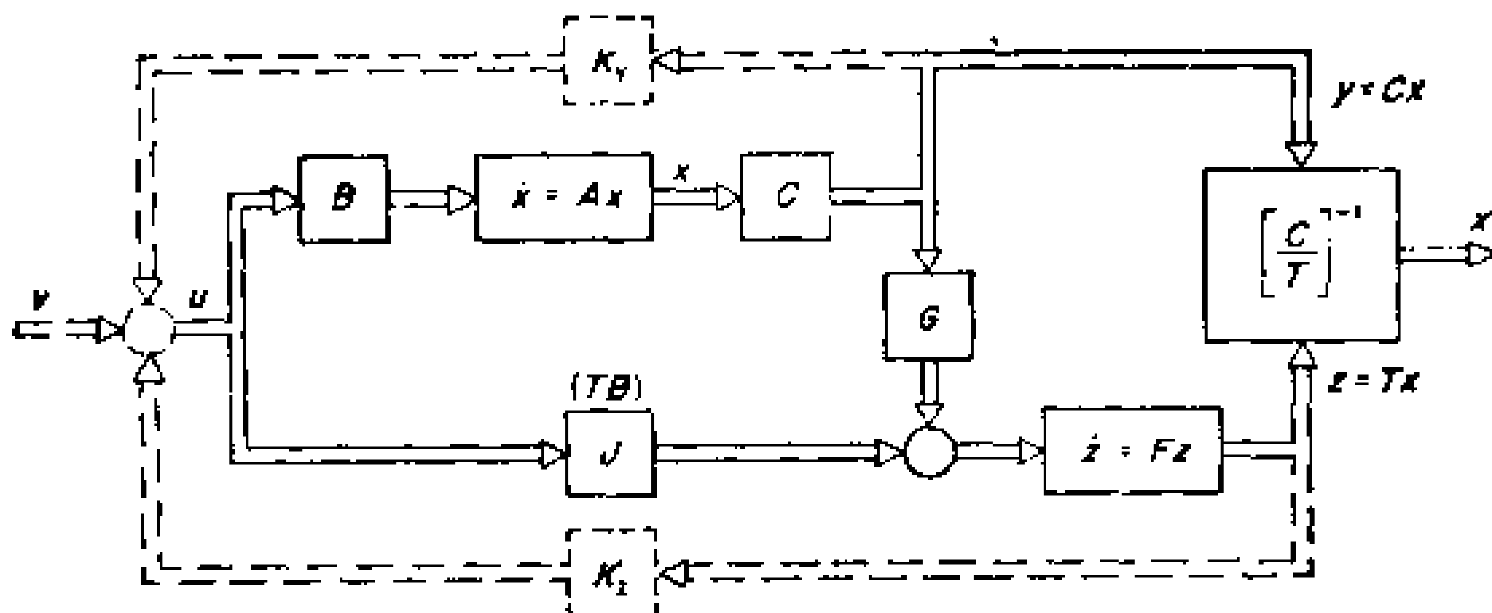


图 5.11　降阶观测器的一般形式，不包括虚线部分

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{B} \tag{5.105}$$

则

$$\boldsymbol{z}(s) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}(s) = [s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}]^{-1}[\boldsymbol{G}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{T}[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]][s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)$$

或

$$Tx(s) = [sI - F]^{-1}[Ts + GC - TA]x(s) \quad (5.106)$$

最后，如果令

$$GC - TA = -FT \quad (5.107)$$

那末从式(5.106)就有

$$Tx(s) = [sI - F]^{-1}[sI - F]Tx(s) \quad (5.108)$$

这里再一次证明加到观测器的输入组合产生抵消观测器极点的零点．于是，设计方程是

$$TA - FT = GC \quad (5.109a)$$

$$J = TB \quad (5.109b)$$

如果 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 具有式(5.101)和式(5.102)的形式，则式(5.109a)可分块写为

$$[T_1 \mid I]\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] - F[T_1 \mid I] = G[I \mid 0]$$

由此可得

$$F = T_1A_{12} + A_{22};\ G = T_1A_{11} + A_{21} - FT_1 \quad (5.110)$$

整个系统的状态方程是

$$\left[\begin{array}{c} \dot{x} \\ \hline \dot{z} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline GC & F \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x \\ \hline z \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} B \\ \hline J \end{array}\right]u \quad (5.111)$$

如果引用设计方程(5.109)的话，就能够检查出能控性矩阵不是满秩的．

作为一个例子，对于具有

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix};\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.112)$$

的系统，x_3 是不可测量的，可以用一阶观测器来产生

$$z = [t_1^T \mid 1]x = [t_1 t_2 \mid 1]x \quad (5.113)$$

由于系统的特征值是 -1，-2，-3，观测器的特征值可以选择为 -5．如果用 $y_1(=x_1)$ 激励观测器，则设计方程(5.109a)可写为

$$[t_1\ \ t_2\ \ 1]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} + 5[t_1 t_2 1] = [g_1\ 0\ 0] \quad (5.114)$$

由此得到

$$-6+5t_1=g_1;\quad t_1-11+5t_2=0;\quad t_2-6+5=0$$

于是

$$t_1=6;\quad t_2=1;\quad g_1=24 \tag{5.115}$$

观测器输出为

$$z=[6\quad 1\quad 1]\boldsymbol{x}$$

由此

$$x_3=z-6x_1-x_2$$

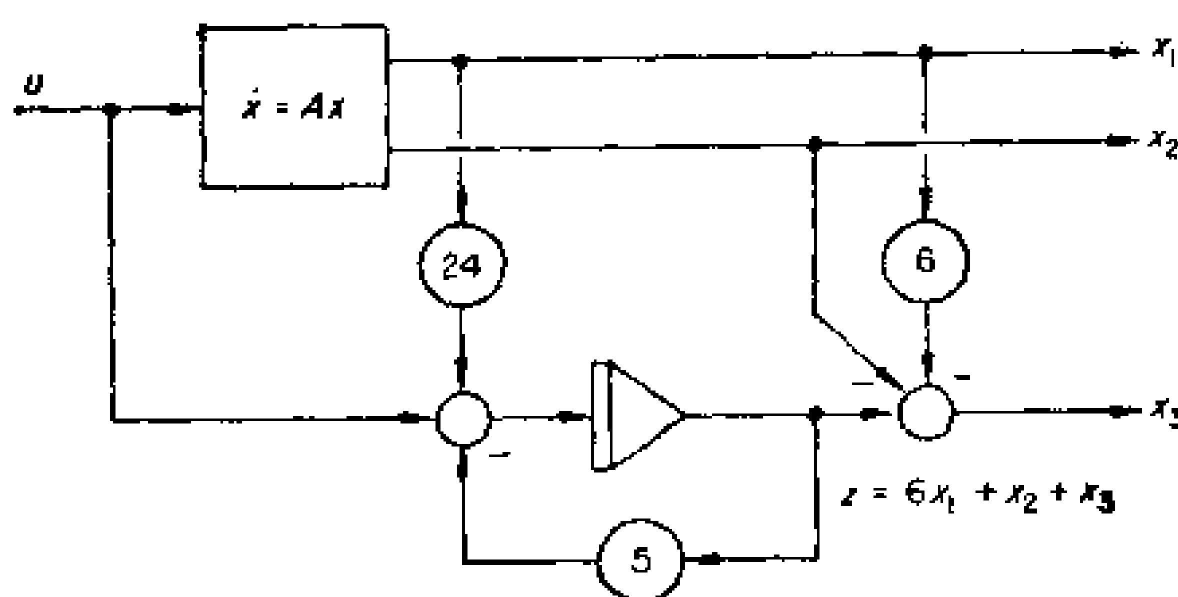


图 5.12 降阶观测器

整个系统如图 5.12 所示，并有

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \hdashline \dot{\boldsymbol{z}}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc:c}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -6 & -11 & -6 & 0\\ \hdashline 24 & 0 & 0 & -5\end{array}\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \hdashline \boldsymbol{z}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\\ \hdashline 1\end{bmatrix}u \tag{5.116}$$

可以验证，能控性矩阵的秩为 3，像预料的那样不满秩. 如果此系统中只有 x_1 可测量到，那末就需要一个二阶观测器，即

$$\boldsymbol{T}=\left[\begin{array}{c:cc}t_{11} & 1 & 0\\ t_{21} & 0 & 1\end{array}\right] \tag{5.117}$$

此时设计方程(5.109a)为

$$\begin{bmatrix}t_{11} & 1 & 0\\ t_{21} & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}f_{11} & f_{12}\\ f_{21} & f_{22}\end{bmatrix}\times$$

$$\times \begin{bmatrix} f_{11} & 1 & 0 \\ f_{21} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{21} \end{bmatrix} [1 \quad 0 \quad 0] \tag{5.118}$$

详细展开这个方程可立即得出

$$f_{12} = 1; \ f_{22} = -6$$

如果指定观测器的特征值是(比如说)-4，-5，特征方程将是

$$s^2 + 9s + 20 = s^2 - s(f_{11} + f_{22}) + f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} = 0$$

由此得 $f_{11} = -3$，$f_{21} = -2$，即

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \tag{5.119}$$

如果将 $\boldsymbol{F}$ 代入式(5.118)，就可求得

$$\boldsymbol{T} = \left[\begin{array}{c|cc} -3 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \end{array}\right]; \ g_{11} = -18; \ g_{21} = 42 \tag{5.120}$$

整个系统为

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \hline \dot{\boldsymbol{z}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -11 & -6 & 0 & 0 \\ \hline -18 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 42 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \hline \boldsymbol{z} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \hline 0 \\ 1 \end{array}\right] u \tag{5.121}$$

它的能控性矩阵的秩为 3 .

5.7 闭环系统的观测器

如果把系统输出 $\boldsymbol{y}$ 和观测器输出 $\boldsymbol{z}$ 作反馈用(如图 5.11 虚线通道所示)，那末观测器就构成闭环系统的一部分，当设计整个系统时，必须弄清楚是否需要考虑观测器的特征值．由于零点极点相消使观测器对于 $\boldsymbol{u}$ 是不能控的，因此，可以预料到观测器的特征值将不直接进入闭环系统结构，适当变换整个系统的矩阵即可证明这一点．

由图 5.11 可以得到包括反馈通道在内的整个系统的矩阵 $\boldsymbol{A}_t$ 为

$$\left[\begin{array}{c}\dot{x}\\ \hline \dot{z}\end{array}\right]=\underset{(A_t)}{\left[\begin{array}{c|c}A+BK_yC & BK_z\\ \hline GC+TBK_yC & F+TBK_z\end{array}\right]}\left[\begin{array}{c}x\\ \hline z\end{array}\right]$$

$$+\left[\begin{array}{c}B\\ \hline TB\end{array}\right]v \tag{5.122}$$

为了考察观测器的作用，使用相似转换（2.2 节）方法很方便．一般的系统方程为

$$\dot{x}=Ax+Bu$$

用矩阵 N 左乘上式并引入 $N^{-1}N=I$ 后，可写成

$$N\dot{x}=NAN^{-1}Nx+NBu \tag{5.123a}$$

或

$$\dot{x}_n=Hx_n+NBu \tag{5.123b}$$

这里用新的状态向量 x_n 和矩阵 H 来研究该系统．如果把转换

$$N=\begin{bmatrix}I & 0\\ -T & I\end{bmatrix};\quad N^{-1}=\begin{bmatrix}I & 0\\ T & I\end{bmatrix} \tag{5.124}$$

用于式(5.122)，所得到系统的矩阵是分块三角形矩阵 A_t.

$$\left[\begin{array}{c}\dot{x}\\ \hline \dot{z}-T\dot{x}\end{array}\right]=\underset{(A_t)}{\left[\begin{array}{c|c}A+B[K_yC+K_zT] & BK_z\\ \hline 0 & F\end{array}\right]}$$

$$\times\left[\begin{array}{c}x\\ \hline z-Tx\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c}B\\ \hline 0\end{array}\right]v \tag{5.125}$$

它的特征值就是

$$A+B[K_yC+K_zT]=A_c \text{ 和 } F$$

的特征值．观察对应的方块图（图 5.13）可以明显地看出这一点．图中观测器对输入 v 已解耦，而没有直接进入闭环系统．如果观测器的振型被激励，观测器输出就要激励这个系统，除非是系统的初始条件满足

$$z(0)-Tx(0)=0 \tag{5.126}$$

此时只有系统的振型被激发．

作为一个例子，假设为了要得到 $-1\pm j2$，-2 的特征值，对上述系统（式(5.121)）施加反馈，由式(5.125)可知，这些特征值应

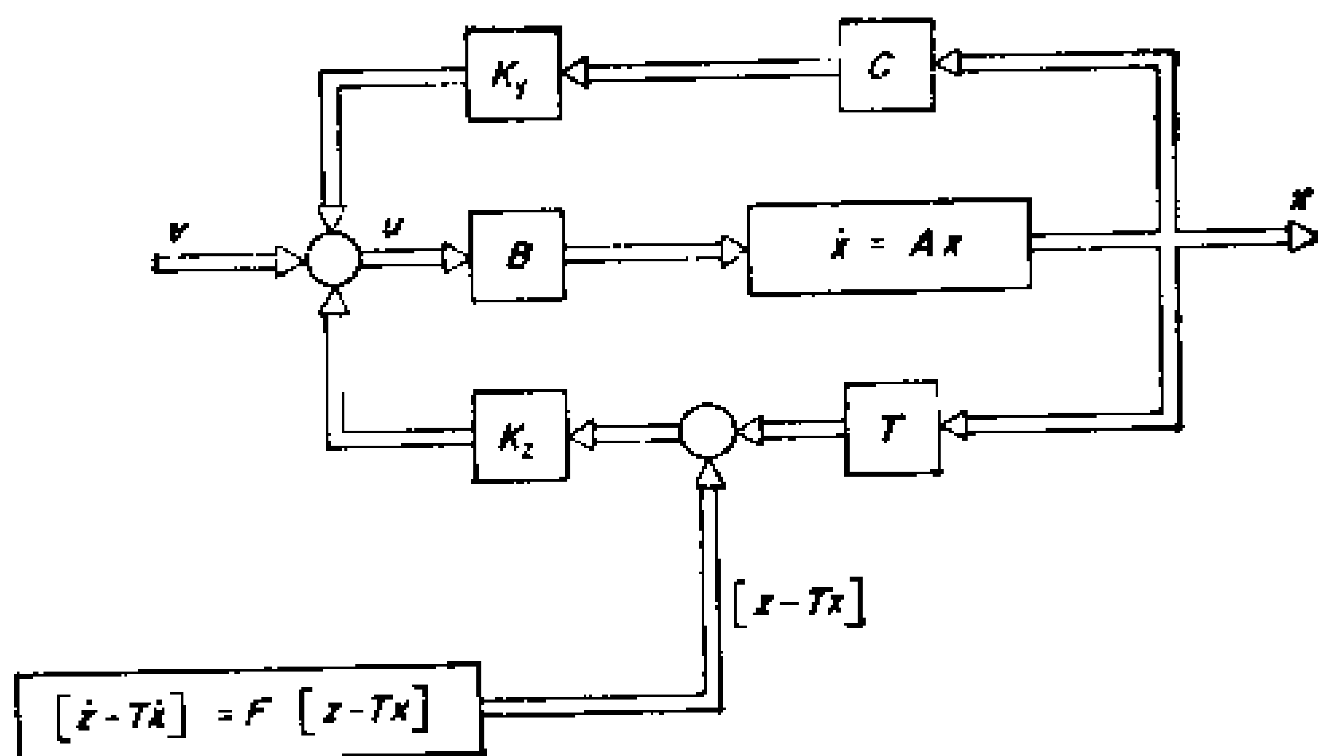


图 5.13 含有观测器的反馈系统的转换

是

$$A_c = A + B[K_yC + K_zT]$$

的特征值．由于

$$B[K_yC+K_zT]=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\left[k_y[1\ \ 0\ \ 0]+[k_{z1}\ \ k_{z2}]\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 9 & 0 & 1\end{bmatrix}\right]$$

$$=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}[(k_y-3k_{z1}+9k_{z2})\ \ k_{z1}\ \ k_{z2}] \tag{5.127}$$

因此

$$A_c=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6+k_y-3k_{z1}+9k_{z2} & -11+k_{z1} & -6+k_{z2}\end{bmatrix} \tag{5.128}$$

根据假定，A_c的特征方程应该是

$$(s+1+j2)(s+1-j2)(s+2)$$
$$=s^3+4s^2+9s+10 \tag{5.129}$$

由此得

$$A_c=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -10 & -9 & -4\end{bmatrix} \tag{5.130}$$

比较式(5.128)和式(5.130)的系数得到

$$k_{x1}=2,\ k_{x2}=2,\ k_y=-16 \tag{5.131}$$

建议读者验证，整个系统的矩阵 $\boldsymbol{A}_s$（式(5.122)）和矩阵 $\boldsymbol{A}_t$（式(5.125)）分别是

$$\boldsymbol{A}_s=\left[\begin{array}{ccc:cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -22 & -11 & -6 & 2 & 2\\ \hdashline -18 & 0 & 0 & -3 & 1\\ 26 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right];$$

$$\boldsymbol{A}_t=\left[\begin{array}{ccc:cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -10 & -9 & -4 & 2 & 2\\ \hdashline & & & -3 & 1\\ & 0 & & -2 & -6 \end{array}\right] \tag{5.132}$$

这里

$$\boldsymbol{A}_t=\boldsymbol{N}\boldsymbol{A}_s\boldsymbol{N}^{-1}$$

其中，$\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{N}^{-1}$ 由式(5.124)给出．可以看出，$\boldsymbol{A}_t$ 的特征值是由对角线方块来确定的．

在第 4.2 节中讨论状态变量反馈时，我们曾提出用附加的传递函数来获得不可测量的或不明显的状态信息的方法．这样的传递函数事实上是降阶观测器．当没有附加传递函数时，图 4.6(b)的系统的开环状态变量表达式是

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:cc} 0 & 1 & 0\\ \hdashline 0 & \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{R}}\\ 0 & & \end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 5\end{bmatrix}u \tag{5.133}$$

式中，$\boldsymbol{R}$ 是产生传递函数

$$\frac{x_2}{u}(s)=\frac{1}{s^2+2s+5}$$

的任何一种表达式．为了产生 $x_4(=x_3)$，用观测器的一般设计式(5.109a)可以得到

$$[t_1\ t_2\ 1]\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -4 & -1\end{bmatrix} - f[t_1 t_2 1] = [g_1 g_2 0] \quad (5.134)$$

如果选择观测器的特征值为 $f = -1$（它模仿了 $\boldsymbol{R}$ 最初的部分），并且只用 x_2 激励观测器（$g_1 = 0$），则从式（5.134）和（5.109b）有

$$\boldsymbol{t}^t = [0\ 0\ 1];\ g_2 = -4;\ J = \boldsymbol{TB} = 5 \quad (5.135)$$

由此得到图 4.6(b) 的附加传递函数．这个观测器的特征值与系统复数振型具有相同的衰减，一个改进的方案是使用衰减得较快的观测器，尽管这时激励装置变得稍微复杂些．

前面已经强调指出，观测器的振型应当比系统振型衰减得快些，特别应避免的是用积分器作为观测器．作为一个例子，假定图 5.14 所示的两个积分器的系统需要用 x_1，x_2 反馈来获得特征值 $-1 \pm j1$，并假定 x_2 是不可测的．为了获得所要求的特征值，必须有

$$\boldsymbol{k}^t = [-2\ \ -2] \quad (5.136)$$

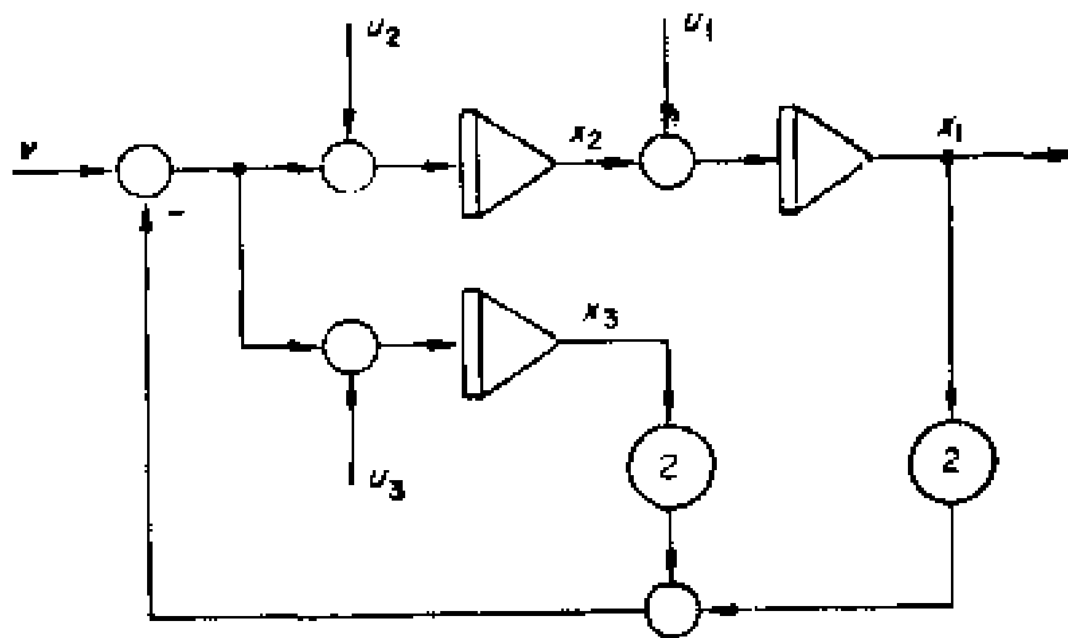


图 5.14 由观测器可能产生偏移的系统

如果用一个附加的积分器来获得 $x_3(=x_2)$，那末整个系统有

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & -2\\ -2 & 0 & -2\end{bmatrix};\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \quad (5.137)$$

式中，$\boldsymbol{A}$ 不是满秩的，因而有一个零特征值（见附录 2.3）．这个特

征值是观测器的．相应的特征向量为

$$W_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{5.138}$$

它表示在系统中可能有常值偏移 $x_3 = -x_1$，可以验证这和方块图是相一致的．观测器对于输入 v 是不能控的，如果系统有了偏移，就不能够由 v 处的任何一个输入来消除它．整个系统有四个可能的输入：u_1，u_2，u_3 和 v，对每一个输入的能控性矩阵可以求得如下：

$$P(u_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}; \quad P(u_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix};$$

$$P(u_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}; \quad P(v) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \tag{5.139}$$

在这四个矩阵中，

$P(u_1)$ 和 $P(v)$ 的秩为 2，控制着复数对 $-1 \pm j1$．

$P(u_2)$ 和 $P(u_3)$ 的秩为 3，控制着复数对和零特征值．

于是，u_2，u_3 处的干扰或初始条件 $x_1(0)$，$x_3(0)$ 会导致系统有固定的偏移，在正常输入 v 处的任何控制都不能消除这种偏移．

能控性与能观测性是状态变量分析的一个方面，可以用各种各样的方法来处理它，从有点儿抽象的线性代数的概念到更为直接地讨论系统特性的方法．本章中采用了后一种方法，特别是因为对二维和三维的系统的能控性与能观测性自然地可作出几何的解释．本章概述了关于当实际信号得不到时能提供状态估值的观测器或状态估值器的原理，并以简单例子进行了讨论．

参 考 文 献

Chen, C. T., *Introduction to Linear System Theory* (Holt, Rinehart and Winston, New York, 1970).

Dorf, R. C., *Time-domain Analysis and Design of Control Systems* (Addison-

Wesley, Reading, Mass., 1965).
Elgerd, O. I., *Control System Theory* (McGraw-Hill, New York, 1967).
Luenberger, D. G., 'An Introduction to Observers', *I.E.E.E. Transactions on Automatic Control*, AC-16 (1971) pp. 596—602.
MacFarlane, A. G. J., *Dynamical System Models* (Harrap, London, 1970).
Timothy, L. K., and Bona, B. E., *State Space Analysis—An Introduction* (McGraw-Hill, New York, 1968).

习 题

5.1 对于系统

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix};\ b=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

输入 u 是阶跃形式

$$u=a,\quad 0<t<1$$

$$u=b,\quad 1<t<2$$

试求出如下形式的 $x(2)$ 的一般表达式

$$x(2)=\begin{bmatrix}* & (S) & *\\ * & & *\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$$

其中，S 的列是对阶跃形式输入 u 的响应。对于 $x(0)=0$ 和

$$x(2)=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

试确定 a 和 b，并画出 x 的轨迹以校对 S 的列。

$$\left(\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\frac{1}{(1-e^{-t})}\begin{bmatrix}1\\ -e^{-t}\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}.\right)$$

5.2 在图 5.4(a) 的系统中，如果 $\tau_1=1$，$\tau_2=1/2$，$\tau_3=1/3$，试确定脉冲输入序列，以便将系统从 $x(0)=0$ 转移到

$$x(0_+)=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$(k_0=11/6;\ k_1=1;\ k_2=1/6)$$

5.3 设系统

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix};\ b_1=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix};\ b_2=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ -1\end{bmatrix};\ b_3=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 4\end{bmatrix}$$

$$c_1^T=[1\ 1\ 1];\ c_2^T=[1\ 2\ 1];\ c_3^T=[1\ 1\ 0];\ c_4^T=[3\ 4\ 1]$$

试从 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵确定能控性和能观测性． 求出 $\boldsymbol{W}$ 和 $\boldsymbol{W}^{-1}$，确定哪些振型是不能控的或不能观测的．从这些结果，可以看出 $\boldsymbol{b}_4$ 和 $\boldsymbol{c}_4^T$ 与 $\boldsymbol{W}$ 和 $\boldsymbol{W}^{-1}$ 有什么特别的关系吗？最后从

$$y(s) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(s)$$

确定输出的零点，并由此肯定振型能观测性的结论．

5.4 画出系统

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & a_{13} \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{c}^T = [1\ \ 0\ \ 0]$$

的方块图．研究该系统的零点极点图，并由此判定，有没有一些 a_{13} 值可以使系统有不能控的或不能观测的振型．如果 $a_{31} \neq 0$，是否影响上面的结果？考察极点随 a_{31} 变化的根轨迹图．

（$a_{13} = 1$，$\lambda = -3$ 不能观测；$a_{13} = -1$，$\lambda = -1$ 不能控；结果与 a_{31} 无关）

5.5 设习题 5.4 的系统中 $a_{31} \neq 0$，试求系统的 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵，并验证 $a_{13} = \pm 1$ 时的结果符合习题 5.4 的结果且与 a_{31} 无关． 求系统的能控平面和不能观测的直线．

（能控的(平面)：$x_1 + x_2 = 0$，x_3 任意值

不能观测线：$x_1 = 0$，$x_2 + x_3 = 0$）

5.6 设系统

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

试确定使复数振型不能控的 b_2 和 b_3 值，并验证由 $\boldsymbol{b}$ 产生的输入零点对消了复数振型的极点．

（$b_2 = -2$；$b_3 = 2$）

5.7 对于

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

运用初等运算分别对 B_1 和 B_2 求出矩阵

$$P=[B\ \ AB\ \ A^2B]$$

的秩，确定是否所有的振型对 u 的某些输入都是能控的。验证所得结果与从 $W^{-1}B$ 所获得的振型能控性是一致的。如

$$C_1=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix};\quad C_2=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

通过求 C_1 和 C_2 的 Q 矩阵

$$Q=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{bmatrix}$$

的秩来研究能观测性。验证此结果与从 CW 所获得的振型能观测性是一致的。

5.8　研究如下系统的状态能控性和输出能控性

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix};\quad b=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -3\end{bmatrix}$$

$$C_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix};\quad C_2=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\quad C_3=\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

CW 的列给出 y 的振型输出的方向，通过考虑典型系统的能控性和 CW 的列，证实所得的输出能控性的结果。

（状态不能控；输出对 C_1 能控，对 C_2 和 C_3 不能控）

5.9　对于系统

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

和系统

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

研究它们对于所有输入的能控性，通过考虑 $W^{-1}B$ 检验所获得的关于这两个系统的结果。

（系统对于连接到第一个振型发生器的任意 u 都是能控的）

5.10　对于在前向通道有一个积分器和时间常数（惯性环节）以及有相位超前补偿的系统（通常像图 3.6 和图 5.2 那样），当 $\tau=1$，$\tau_c=1$，$G_0=10$ 时求 A 矩阵。证明输入 v_2 仅能控制两个振型，而 v_1 控制所有的振型，因而给出图

5.2 的扰动响应特性. 画出 $\boldsymbol{P}v_1$ 各列(向量)的方向,然后证明对 v_1 的能控性与 K 无关.

$$\left(\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -K & -1 & -9K\\ -1 & 0 & -10\end{bmatrix}\right)$$

5.11　一个三维系统如果它的 $\boldsymbol{P}$ 矩阵的秩为 2,则有两个能控的振型. 此时 $\boldsymbol{P}$ 矩阵的列不是独立的且可以表示为

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}=m_1\boldsymbol{b}+m_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}$$

在这个关系式里,引进

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{W}^{-1};\ \boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Lambda}^2\boldsymbol{W}^{-1}$$

而且,如果 λ_1 是不能控的,试证明展开关系式可得

$$\lambda_2^2=m_1+m_2\lambda_2;\ \lambda_3^2=m_1+m_2\lambda_3$$

因此一般表达式

$$\lambda^2-m_2\lambda-m_1=0$$

的解给出能控的振型而不需要去确定 $\boldsymbol{W}^{-1}$.

把这个结果应用到式(5.61)

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & a_{13}\\ 0 & 0 & 1\\ -a_{31} & 0 & -5\end{bmatrix};\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

如果 $a_{13}=1$, 求一般表达式,并且验证当 $a_{31}=6$ 时即给出式(5.67)所获得的结果.

如果 $\boldsymbol{Q}$ 是不满秩的,通过

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A}^2=n_1\boldsymbol{c}^T+n_2\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A}$$

导出一个类似的表达式

$$\lambda^2-n_2\lambda-n_1=0$$

上面表达式给出能观测的振型. 验证当 $a_{13}=1/5$ 时,得到式(5.70)的能观测振型.

$$(m_1=-a_{31};\ m_2=-5;\ n_1=-a_{31}/5;\ n_2=-1)$$

5.12　给出如下系统

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix};\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix};\ \boldsymbol{c}^T=[3\ \ -1]$$

设由系统到观测器的输入可以是加到 $\dot{z}_2$ 或 $\dot{z}_1$ 的 $\pm y(=\pm\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x})$,试设计此系统的恒等观测器. 你认为应推荐哪一个符号和输入点? 哪一个必须避免?

(考虑观测器的特征值.)

对所推荐的系统,求整个系统的矩阵 $\boldsymbol{A}_t$,并验证能控性与预期的相同。

由 $[sI-A_t]^{-1}b$ 中适当的项确定传递函数

$$\frac{x_1}{u}(s)$$

然后验证产生了抵消观测器极点的零点.

$$\left(\begin{array}{l}+y\text{ 输入到 }z_1\text{ 给出最大的观测器阻尼}\\-y\text{ 输入到 }z_1\text{ 给出不稳定的观测器}\\ \boldsymbol{A}_t=\left(\begin{array}{cc|cc}0&1&&\\-6&-5&&\boldsymbol{0}\\\hline 3&-1&-3&2\\0&0&-6&-5\end{array}\right)\end{array}\right)$$

5.13 对系统

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&1\\-2&-4\end{bmatrix};\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix};\ \boldsymbol{c}^T=[1\ \ 0]$$

设计一个特征值为 $-4,-5$ 的恒等观测器.

因为观测器产生状态向量 $\boldsymbol{x}$,整个系统的特征向量矩阵 $\boldsymbol{W}$ 可以通过观察写出来. 根据 $\boldsymbol{W}$ 求出 $\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{b}$ 中适当的元素以证明观测器对 u 是不能控的.

$$\left(\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}-5&1\\0&-4\end{bmatrix};\ \boldsymbol{g}=\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}\right)$$

5.14 对于习题 5.13 的系统, 设计一个特征值为 -5 的降阶观测器以便能获得 x_2. 画出整个系统的方块图.

$$(\boldsymbol{t}^T=[-1\ \ 1];\ g_1=-6)$$

5.15 对于习题 5.13 的系统, 如果具有习题 5.14 的观测器, 要求闭合回路的特征值是 $-1\pm j2$, 试确定需要的 k_y 和 k_z 值, 写出整个系统的矩阵 $\boldsymbol{A}_t$. 取 $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{N}^{-1}$ 如式 (5.124) 所示,验证转换后的矩阵

$$\boldsymbol{A}_T=\boldsymbol{N}\boldsymbol{A}_t\boldsymbol{N}^{-1}=\boldsymbol{N}\left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\hline\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\end{array}\right]\boldsymbol{N}^{-1}$$

有预期的形式. 验证时,如上式那样将 $\boldsymbol{A}_t$ 分块并在代入数值以前先求出 $\boldsymbol{A}_T$ 的分块元素的一般表示式是比较方便的.

$$\left(k_y=1;\ k_z=3;\ \boldsymbol{A}_t=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-1&-4&3\\-5&0&-2\end{bmatrix};\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)$$

5.16 对于系统

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix};\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};\ \boldsymbol{c}^T=[1\quad 0\quad 0]
$$

设计一个特征值为 -4，-5 的观测器以便能够获得 x_2 和 x_3. 求整个系统的矩阵.

$$
\left(\boldsymbol{A}_s=\left[\begin{array}{ccc:cc}0&1&0&&\\0&0&1&0&\\0&0&0&&\\\hdashline-61&0&0&-9&1\\-180&0&0&-20&0\end{array}\right];\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix};\ \boldsymbol{T}=\left[\begin{array}{c:cc}9&1&0\\20&0&1\end{array}\right]\right)
$$

5.17　对于习题 5.16 的系统，如果观测器同上题，要求闭合回路的特征值是 $-1\pm j2$，-2. 试确定下列各值：

$$
k_y;\ \boldsymbol{k}_x^T=[k_{x1}\ k_{x2}]
$$

并求出整个系统的矩阵 $\boldsymbol{A}_s$.

$$
\left(k_y=-171;\ k_{x1}=-9;\ k_{x2}=-4;\ \boldsymbol{A}_s=\left[\begin{array}{ccc:cc}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\-171&0&0&-9&-4\\\hdashline-61&0&0&-9&1\\-351&0&0&-29&-4\end{array}\right]\right)
$$

5.18　对于图 4.6 的系统，令

$$
\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{c:cc}0&1&0\\\hline 0&-1&1\\0&-4&-1\end{array}\right];\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}
$$

设计一个由 x_2 激励，特征值为 -4 的降阶观测器，以获得 x_3。

$$
(\boldsymbol{t}^T=[0\ -3\ 1];\ g_1=-13)
$$

5.19　对于习题 5.18 的系统，设观测器同上题，试确定 k_{y1}，k_{y2} 和 k_z 以得到闭合回路特征值 $-1\pm j3$，-2。

$$
(k_{y1}=-20;\ k_{y2}=-13;\ k_z=-2)
$$

第六章　离散时间系统

前面都是通过连续系统来介绍状态变量分析方法，但是这些原理和方法也适用于离散时间系统．在离散系统中，变量只能在离散的时间瞬间发生变化，系统类似于一个差分方程．可能有这样的情况，系统一部分具有连续变化的变量，而另一部分则以离散的方式运行．当一个连续系统，例如一个常规的伺服机构，用采样的控制信号来驱动，或者是从计算机得到控制信息时，就出现这种情况．不管系统具有什么样的结构细节，都可以用状态向量表示它的各个变量，并且可以应用前面介绍的一般方法，运用类似于连续系统的状态变量的概念去研究这种系统的行为．

6.1　离散时间系统

图 6.1 (a) 表示了纯离散系统的一般形式，图中某一瞬间的状态 $\boldsymbol{x}(k)$ 用保存在各个寄存器或延迟单元 (D. U) 里的数值来表示．状态的下一组数值 $\boldsymbol{x}(k+1)$ 用下面关系式确定：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{\Phi x}(k)+\boldsymbol{Bu}(k) \tag{6.1}$$

式中，$\boldsymbol{\Phi}$ 是离散型的转移矩阵，它给出围绕各个延迟单元的反馈连接．经过一些开关原理的操作，把 $\boldsymbol{x}(k+1)$ 的值送入寄存器，然后一组新的未来状态数值 $\boldsymbol{x}(k+2)$ 由下式得到：

$$\boldsymbol{x}(k+2)=\boldsymbol{\Phi x}(k+1)+\boldsymbol{Bu}(k+1) \tag{6.2}$$

并做好送入寄存器的准备．对于这种类型的系统，它和时间没有直接的关系．从原则上讲，这种系统可以按任意速度有规律地或无规律地运行，而序列值…，$\boldsymbol{x}(k)$，$\boldsymbol{x}(k+1)$，$\boldsymbol{x}(k+2)$，…将不受影响．

图 6.1 (b) 描述了一个既有离散部分又有连续部分的系统，图

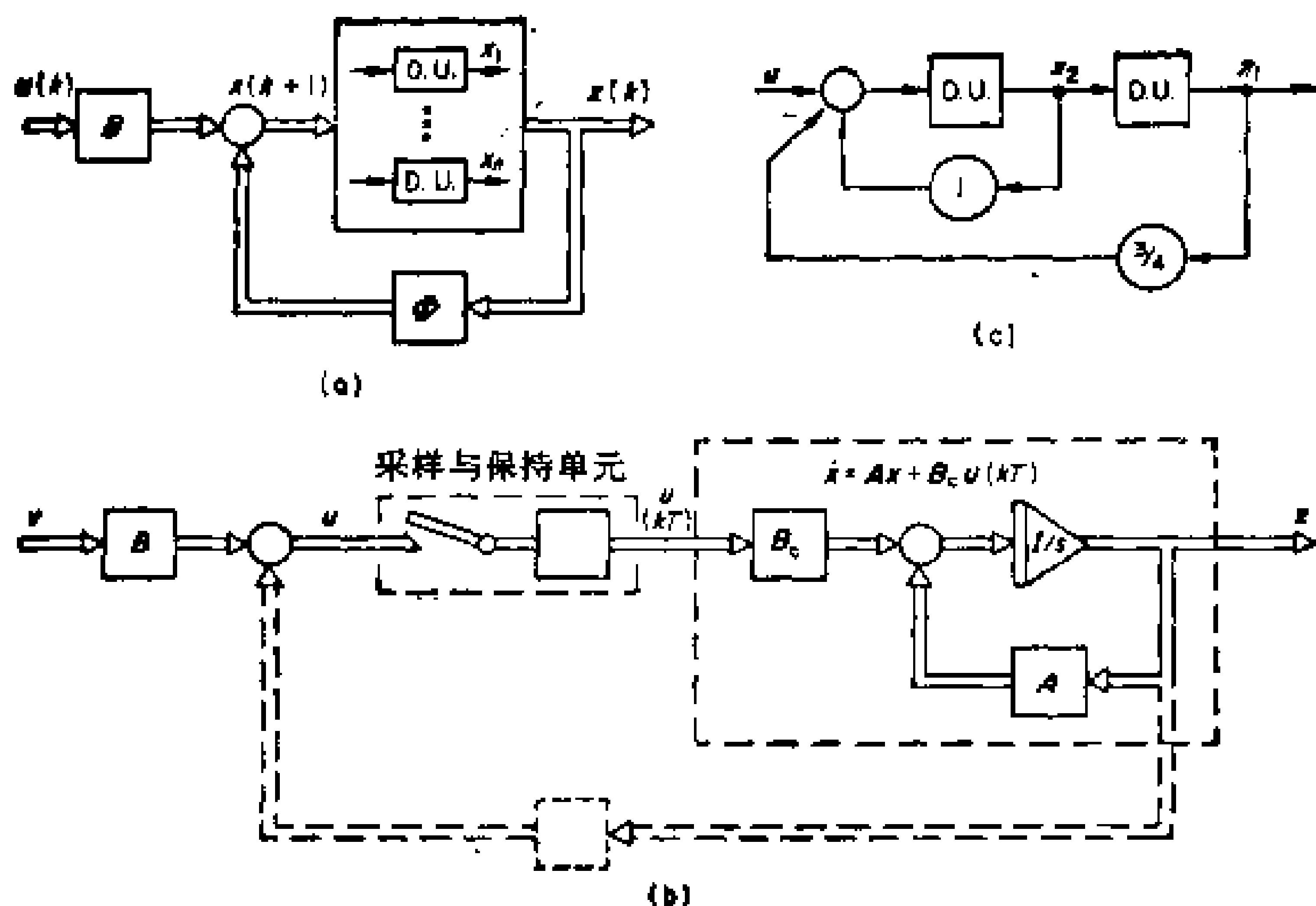


图 6.1 离散时间系统：(a) 纯离散系统(图中 D. U. 为延迟单元)；(b) 有连续部分的系统；(c) 简单系统

中，信号 $\boldsymbol{u}(kT)$ 通过 $\boldsymbol{B}_c$ 驱动由 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 所确定的连续部分，而 $\boldsymbol{u}(kT)$ 的各个分量分别由各输入经采样保持单元得到。这就形成了一种在采样间隔 T 内保持不变的控制。系统的状态就是连续地变化着的信号 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$，其中一个或几个可能被反馈回去，并与连续输入 $\boldsymbol{v}(t)$ 进行比较。在这种类型的系统中，采样间隔 T 的变化将影响状态的序列值，并且甚至可能使系统变得不稳定。

6.2 纯离散系统的时域分析

对图 6.1 (a) 形式的纯离散系统，状态的序列值由式 (6.1) 给出。从某个可能的初始条件 $\boldsymbol{x}(0)$ 开始，有

$$\boldsymbol{x}(1)=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(0) \tag{6.3}$$

且 $\boldsymbol{x}(1)$ 又作为下一次转移的初始值。

$$\boldsymbol{x}(2)=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x}(1)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(1) \tag{6.4}$$

把 $\boldsymbol{x}(1)$ 代入，得

$$x(2) = \Phi^2 x(0) + \Phi B u(0) + B u(1) \tag{6.5}$$

进而可得 $x(3)$ 为

$$x(3) = \Phi^3 x(0) + \Phi^2 B u(0) + \Phi B u(1) + B u(2) \tag{6.6}$$

可以看出，系统是线性的，因为系统状态值是由原始初始条件确定的分量和每一间隔的输入确定的分量之和所组成的。式(6.6)获得的结果表明，一般的状态值可以表示为

$$x(n) = \Phi^n x(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \Phi^{(n-1-k)} B u(k) \tag{6.7}$$

作为一个例子，我们考虑图 6.1 (c) 的系统，其中

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3/4 & 1 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

由

$$x(k+1) = \Phi x(k)$$

得到的初始条件响应为

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad x(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/4 \end{bmatrix}; \quad x(2) = \begin{bmatrix} 1/4 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$x(3) = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -11/16 \end{bmatrix}; \cdots \tag{6.9}$$

如果施加输入，其响应序列可由

$$x(k+1) = \Phi x(k) + b u(k)$$

得到。对于零初始条件以及

$$u(0) = 1; \quad u(1) = -1; \quad u(2) = 1 \tag{6.10}$$

得到的响应序列是

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad x(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ x(2) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x(3) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -3/4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/4 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

系统的状态瞬时地从一组值变为另一组值，而没有中间的轨迹。

6.3　具有连续部分的系统

对于具有连续部分的系统，在任一采样间隔 T 内都同时存在着两个独立的连续响应：

（1）对初始条件的响应.

（2）对保持单元输出的响应.

对线性系统来说，这两个响应可以分开计算，然后相加，得到在采样间隔末了的最终状态，并且把它作为下一个采样间隔的初始条件.

对初始条件的连续响应由转移矩阵求得.

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)$$

因此，采样间隔为 T 时，有

$$\boldsymbol{x}(T)=\boldsymbol{\Phi}(T)\boldsymbol{x}(0)=e^{\boldsymbol{A}T}\boldsymbol{x}(0) \tag{6.12}$$

如果没有采样保持单元而施加一个连续的输入 $\boldsymbol{u}(t)$，则

$$\boldsymbol{x}(t)=\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}_c\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

对于离散时间系统，在一个采样间隔内保持单元的输出是常数 $\boldsymbol{u}(kT)$，因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k+1)T &= \left[\int_0^T \boldsymbol{\Phi}(T-\tau)d\tau\right]\boldsymbol{B}_c\boldsymbol{u}(kT)\\ &= \boldsymbol{\theta}(T)\boldsymbol{u}(kT)\end{aligned} \tag{6.13}$$

式中，$\boldsymbol{\theta}(T)$ 是**控制**转移矩阵. 随 T 而变化的 $\boldsymbol{\theta}(T)$ 的各元素分别是系统对加在 $\boldsymbol{B}_c$ 的各输入端的单位阶跃响应. 图 6.2 (a) 给出了系统的离散形式.

对于具有初始条件和输入的一般情况，状态序列是

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{x}(T) &= \boldsymbol{\Phi}(T)\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{\theta}(T)\boldsymbol{u}(0)\\ \boldsymbol{x}(2T) &= \boldsymbol{\Phi}(T)\boldsymbol{x}(T)+\boldsymbol{\theta}(T)\boldsymbol{u}(T)\\ &= \boldsymbol{\Phi}^2(T)\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{\Phi}(T)\boldsymbol{\theta}(T)\boldsymbol{u}(0)+\boldsymbol{\theta}(T)\boldsymbol{u}(T)\\ \boldsymbol{x}(3T) &= \boldsymbol{\Phi}^3(T)\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{\Phi}^2(T)\boldsymbol{\theta}(T)\boldsymbol{u}(0)\\ &\quad+\boldsymbol{\Phi}(T)\boldsymbol{\theta}(T)\boldsymbol{u}(T)+\boldsymbol{\theta}(T)\boldsymbol{u}(2T)\end{aligned}\right\} \tag{6.14}$$

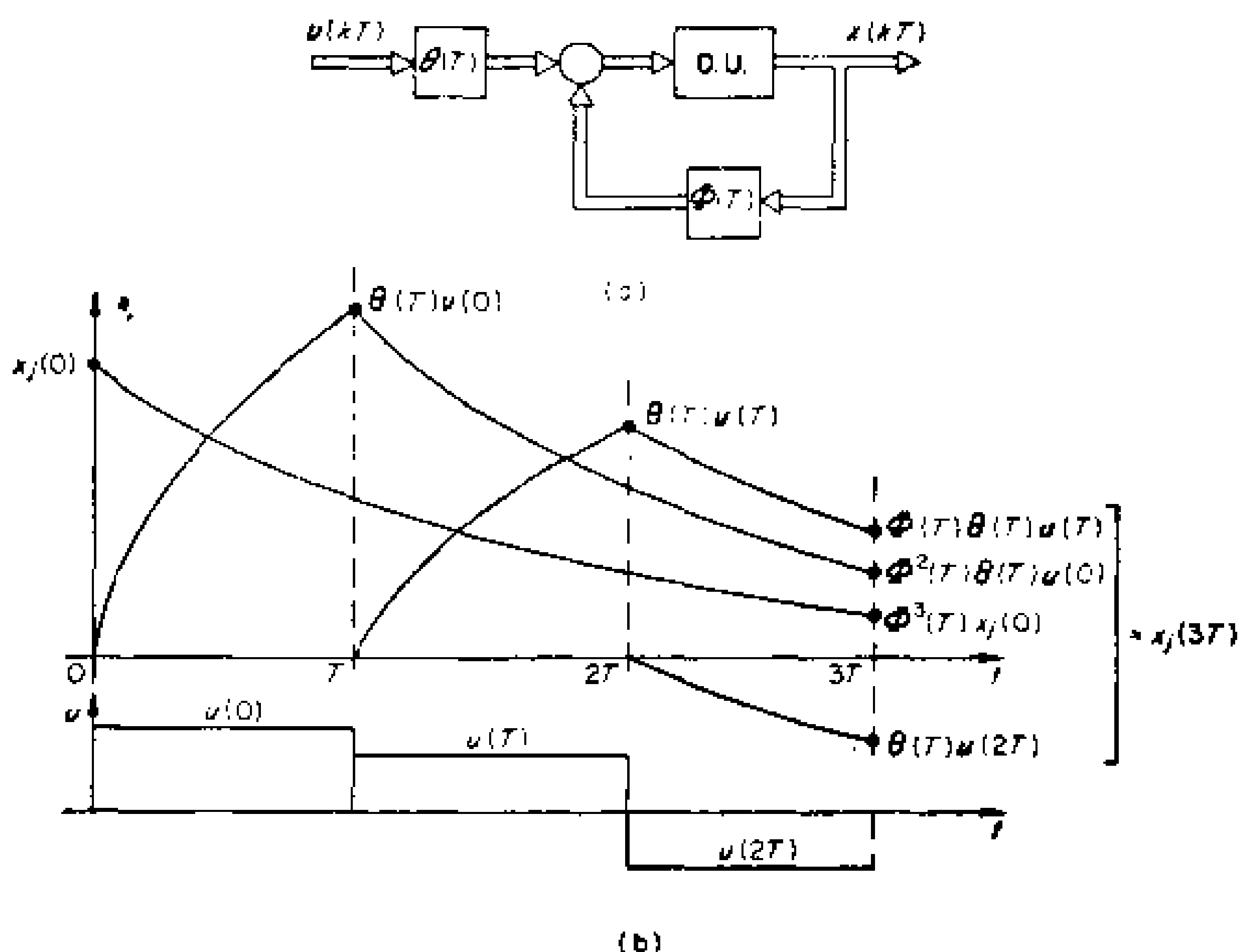


图 6.2　有连续部分的系统：(a) 离散形式；(b) x_j (3T) 的分量

可归纳为

$$\boldsymbol{x}(nT)=\boldsymbol{\Phi}^{n}(T)\boldsymbol{x}(0)+\sum_{k=0}^{n-1}\boldsymbol{\Phi}^{n-1-k}(T)\boldsymbol{\theta}(T)\boldsymbol{u}(kT) \quad (6.15)$$

式中，$\boldsymbol{x}(nT)$ 是 $\boldsymbol{x}(0)$ 和所有输入 $\boldsymbol{u}(0),\cdots,\boldsymbol{u}((n-1)T)$ 的作用的总和．图 6.2 (b) 画出了对于某个状态变量 x_j，可能存在的 $x_j(3T)$ 的各个分量．式 (6.12) 的一般结果仅适用于离散的时刻 $t=0, T, 2T, \cdots$，由于系统是连续的，所以系统的状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 将具有连续的轨迹，虽然仅能在 $t=0, T, 2T, \cdots$ 时刻由式 (6.15) 来计算它的数值．原则上，中间时刻的 $\boldsymbol{x}(kT+t_1)$ 值可以由 $\boldsymbol{x}(kT)$ 求得：

$$\boldsymbol{x}(kT+t_1)=\boldsymbol{\Phi}(t_1)\boldsymbol{x}(kT)+\boldsymbol{\theta}(t_1)\boldsymbol{u}(kT) \qquad (6.16)$$

式中，$0<t_1<T$．

对于连续系统，必须研究系统对初始条件和阶跃输入的响应以求得 $\boldsymbol{\Phi}(T)$ 和 $\boldsymbol{\theta}(T)$ 的各元素．图 6.3 所示为有惯性环节和积

分环节的系统，具有状态 x_1, x_2 和输入 u_1, u_2. 图 6.3 画出了对应于初始条件和阶跃输入的连续响应，它们确定了 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 和 $\boldsymbol{\theta}(t)$ 的元素. 令 $t = T$, 则

$$\boldsymbol{\Phi}(T) = \begin{bmatrix} 1 & \tau(1 - e^{-T/\tau})/\tau_i \\ 0 & e^{-T/\tau} \end{bmatrix} \tag{6.17}$$

和

$$\boldsymbol{\theta}(T) = \begin{bmatrix} T/\tau_i & [T - \tau(1 - e^{-T/\tau})]/\tau_i \\ 0 & 1 - e^{-T/\tau_i} \end{bmatrix} \tag{6.18}$$

对于一个具体的系统，可以确定实际的数值. 例如，当 $T = \tau_i = \tau$

$$\boldsymbol{\Phi}(T) = \begin{bmatrix} 1 & (1 - e^{-1}) \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\theta}(T) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-1} \\ 0 & (1 - e^{-1}) \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

和

$$\boldsymbol{x}(k+1)T = \begin{bmatrix} 1 & 0.63 \\ 0 & 0.37 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(kT) + \begin{bmatrix} 1 & 0.37 \\ 0 & 0.63 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(kT) \tag{6.20}$$

重复地应用式 (6.20)，便可得到对于任意情况下的状态序列.

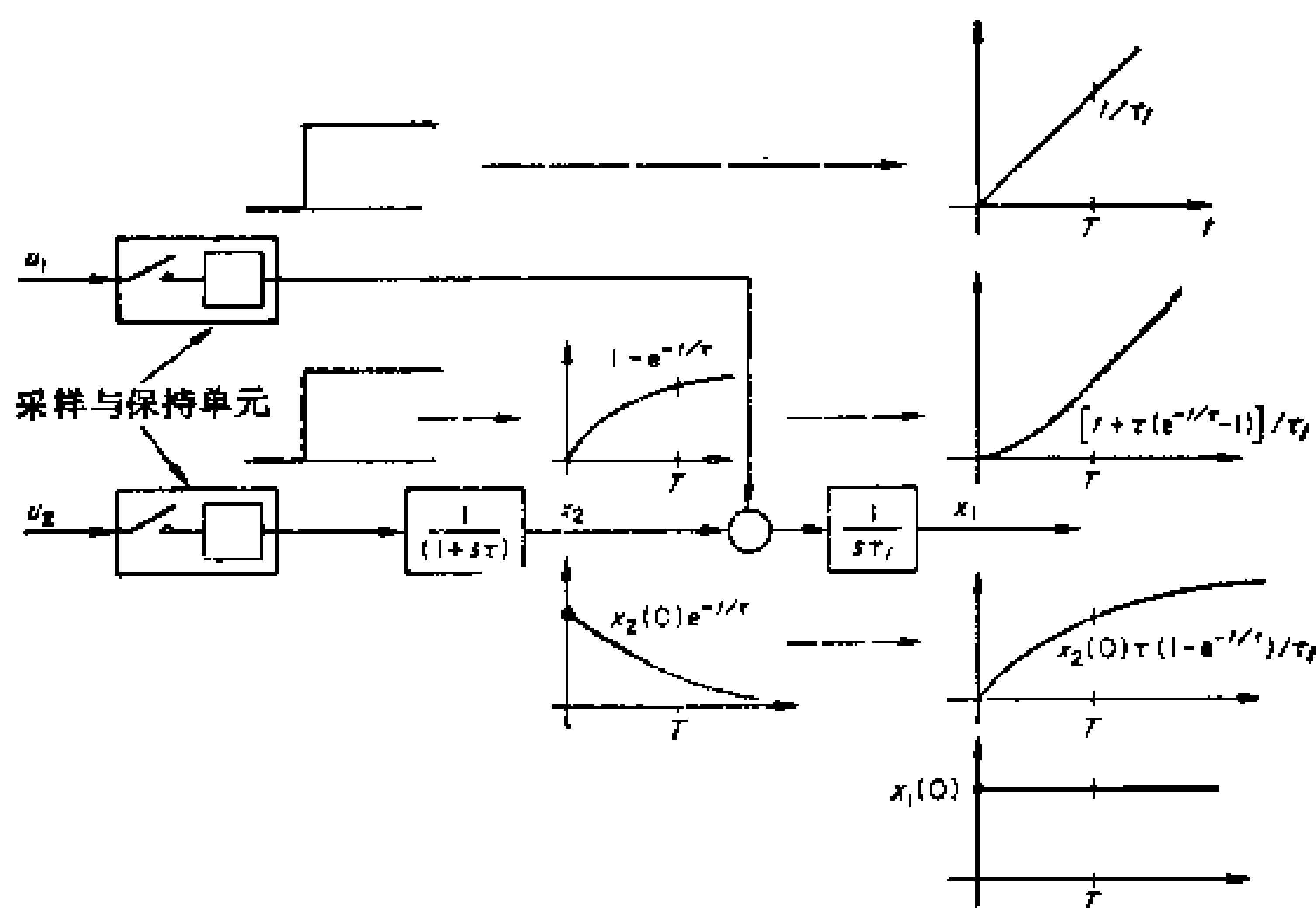


图 6.3 有惯性环节和积分环节的系统的转移矩阵诸元素

当初始条件为

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

时，求得的状态序列为

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix};\ \boldsymbol{x}(T)=\begin{bmatrix}0.63\\0.37\end{bmatrix};\ \boldsymbol{x}(2T)=\begin{bmatrix}0.865\\0.135\end{bmatrix};\cdots \tag{6.21}$$

从而给出处在一条直线上的一系列状态值(见图 6.4(a)). 这条直线就是系统状态连续变化的轨迹，从下面的两个关系式中消去 $e^{-t/\tau}$ 可表明这一点.

$$x_2(t)=x_2(0)e^{-t/\tau} \tag{6.22a}$$

$$x_1(t)=\left(\int_0^t x_2(t)dt\right)\Big/\tau_i \tag{6.22b}$$

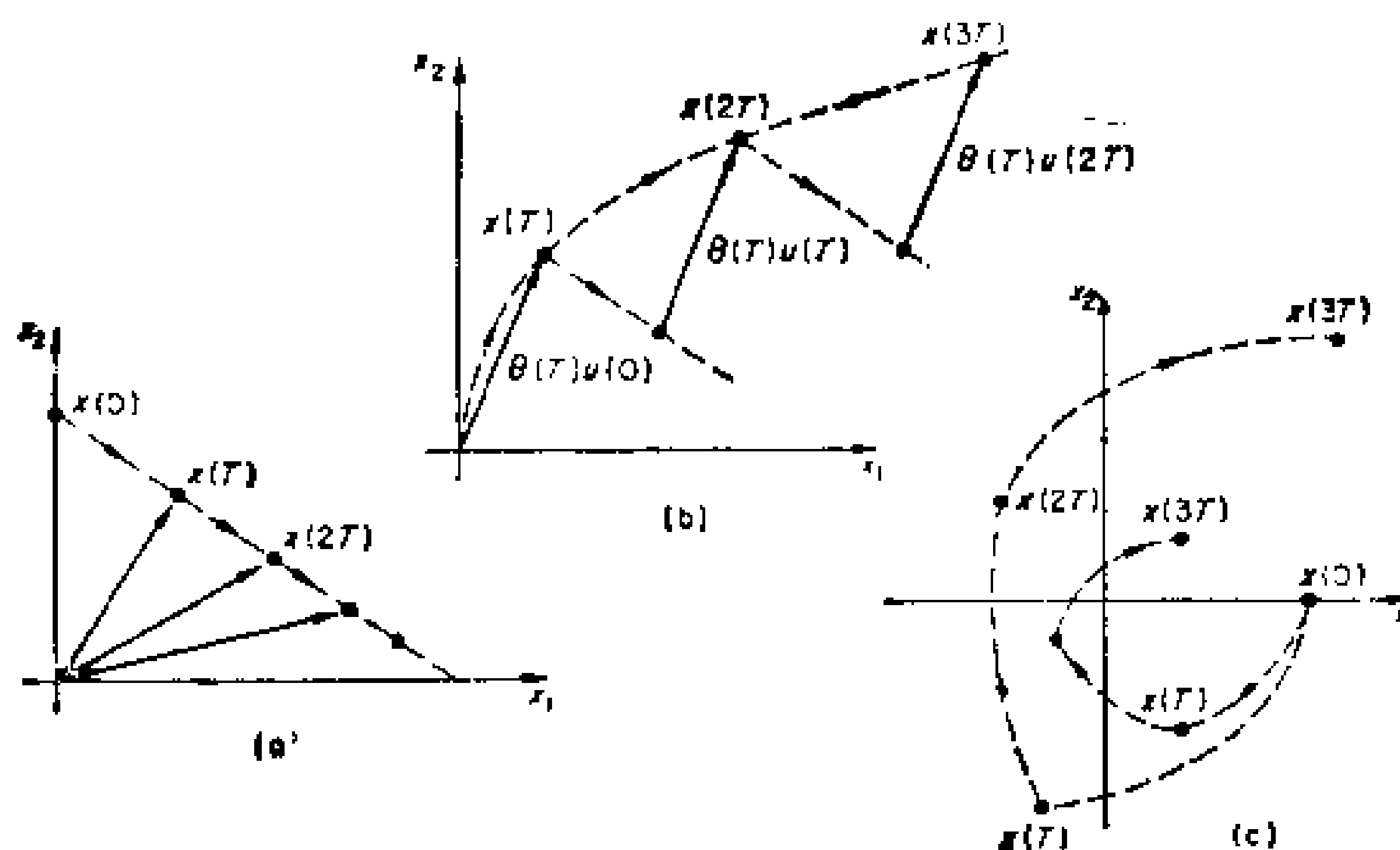


图 6.4 开环与闭环轨迹：(a) 初始条件；(b) 阶跃响应；(c) 可能的闭环轨迹

如果在 u_2 端施加一个恒定的输入

$$\boldsymbol{u}(0)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix};\ \cdots;\ \boldsymbol{u}(kT)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix};\cdots$$

则状态序列为

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix};\ \boldsymbol{x}(T)=\begin{bmatrix}0.37\\0.63\end{bmatrix};\ \boldsymbol{x}(2T)=\begin{bmatrix}1.14\\0.86\end{bmatrix};\cdots \tag{6.23}$$

并且处在图 6.4 (b) 所示的阶跃响应的轨迹上．第一个采样间隔末了的状态 $\boldsymbol{x}(T)$ 为 $\boldsymbol{\theta}(T)\boldsymbol{u}(0)$，在接着而来的时间间隔中的轨迹由两部分作用所组成：其中一部分为初始条件（即上一采样间隔末了的状态）的作用，它沿着一条直线衰减下去，另一部分为一个恒定不变的分量 $\boldsymbol{\theta}(T)\boldsymbol{u}(kT)$ 的作用．

如果采用反馈，使

$$u_2(t)=[-k_1\ \ 0]\boldsymbol{x}(t) \tag{6.24}$$

其结果是改变了 $\boldsymbol{\Phi}$ 的一些元素，从而得到 $\boldsymbol{\Phi}_c$：

$$\boldsymbol{\Phi}_c=\begin{bmatrix}(\phi_{11}-k_1\theta_{12}) & \phi_{12}\\(\phi_{21}-k_1\theta_{22}) & \phi_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1-k_1e^{-1}) & 1-e^{-1}\\(-k_1(1-e^{-1})) & e^{-1}\end{bmatrix} \tag{6.25}$$

这样，系统的特性完全不同了，并且和 k_1 的大小有关．这时初始条件的响应曲线可能以振荡的方式衰减或者变得不稳定，其状态轨迹的一般形状如图 6.4 (c) 所示．

6.4 状态方程的 z 变换

前面几节用状态向量方程讨论了离散时间系统的时域分析．通过 z 变换，可以把这些方程变换到 z 域，并按照 z 平面上的零极点图来研究它，其原理和用以拉普拉斯变换求得的 s 平面的零极点图研究纯连续系统一样．附录 3 介绍了 z 变换原理的概要．

一个一阶的连续系统

$$\dot{x}=ax+bu \tag{6.26}$$

可以变换为

$$sx(s)-x(0)=ax(s)+bu(s) \tag{6.27}$$

或

$$x(s)=\frac{x(0)}{(s-a)}+\frac{b}{(s-a)}u(s) \tag{6.28}$$

一般可以把它表示为图 6.5 (a) 的形式．一个一阶的纯离散时间系

统的方程为

$$x(k+1)=\phi x(k)+bu(k) \tag{6.29}$$

并可以表示为如图 6.5 (b) 的形式，图中，在前向通道用延迟单元代替了连续系统的积分器．假定 $u(k)=0$，这时系统的固有振型是由初始条件 $x(0)$ 引起的在输出端出现的序列值，它类似于连续系统中的指数振型．一个初始条件将引起

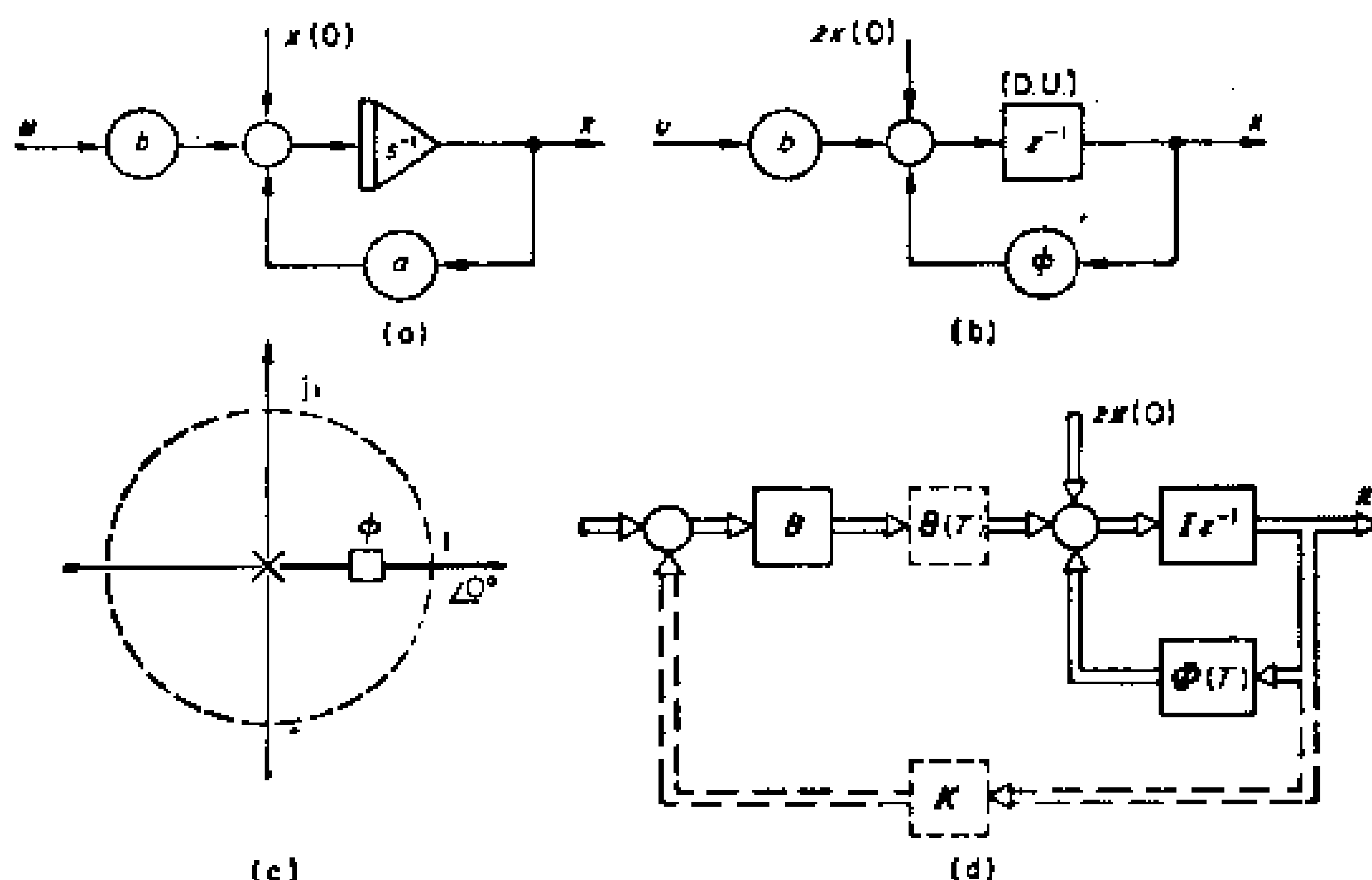


图 6.5　z 域表示图：(a),(b) 连续及离散一阶系统；(c) z 平面上的极点；(d) 一般系统的 z 域表示图

$$\left.\begin{aligned} x(1)&=\phi x(0)\\ x(2)&=\phi x(1)=\phi^2x(0)\\ x(3)&=\phi x(2)=\phi^3x(0)\end{aligned}\right\} \tag{6.30}$$

从而得到下列时域序列：

$$x(k)=x(0)\ (1,\ \phi,\ \phi^2,\ \cdots,\ \phi^n,\ \cdots) \tag{6.31}$$

在 z 变换中，一个采样间隔的延迟用 z^{-1} 表示，因此，式 (6.31) 变成

$$x(z)=x(0)\quad(1+\phi z^{-1}+\phi^2z^{-2}+\phi^3z^{-3}+\cdots+\phi^nz^{-n}+\cdots) \tag{6.32}$$

将它表示为闭合式(严格地说，仅适用于 $|\phi|<1$) 就是

$$x(z) = \frac{x(0)}{1 - \phi z^{-1}} = \frac{zx(0)}{z - \phi} \tag{6.33}$$

如图 6.5 (c) 所示，在 z 平面上，这个离散系统的特点是在 $z = \phi$ 处有一个极点，这个极点所对应的时域序列为

$$1,\ \phi,\ \phi^2,\ \phi^3, \cdots,\ \phi^n, \cdots$$

一般情况下，ϕ 可以是实数或复数. 如果 ϕ 处在单位圆里面，这时由于 $|\phi| < 1$，这一序列的幅值是递减的，系统是稳定的. 而如果 ϕ 在单位圆外面，则 $|\phi| > 1$，系统是不稳定的（详细的论述见附录 3）. 式 (6.33) 可以写为

$$x(z)(z - \phi) = zx(0) \tag{6.34a}$$

或

$$zx(z) = \phi x(z) + zx(0) \tag{6.34b}$$

后一个表达式可以直接从图 6.5 (b) 写出. 如图 6.5 (a) 所示，在 s 域中连续系统的初始条件表示为一个加到积分器输入端的脉冲，该积分器立即产生输出 $x(0)$. 在离散时间系统中，由于 $zz^{-1} = 1$，初始输入条件 $zx(0)$ 立即产生输出 $x(0)$.

如果施加单个输入项 $u(0)$，则得

$$x(1) = bu(0) \tag{6.35}$$

然后 $x(1)$ 便作为初始条件产生固有振型序列. 它被延迟了一个时间间隔，这就是说

$$x(k) = bu(0)(0, 1, \phi, \phi^2, \cdots, \phi^n, \cdots) \tag{6.36}$$

因为系统是线性的，可以独立地考虑第二个输入项 $u(1)$ 的影响，它产生的固有振型序列比式 (6.36) 的再多延迟一个时间间隔.

$$x(k) = bu(1)(0, 0, 1, \phi, \phi^2, \cdots, \phi^n, \cdots) \tag{6.37}$$

对于一个输入序列，它的每一项都产生一个固有振型序列，总的输出是有不同延迟的各固有振型序列之和. 总之，这是 1.4 节中求取一阶连续系统一般响应的方法在离散时间中的翻版.

将输入序列进行 z 变换可得到

$$u(z) = u(0) + z^{-1}u(1) + z^{-2}u(2) + \cdots + z^{-n}u(n) + \cdots \tag{6.38}$$

而对固有振型作 z 变换得到

$$x(z) = \frac{b}{(z-\phi)}\{u(0) + z^{-1}u(1) + z^{-2}u(2) + \cdots\}$$

$$= \frac{bu(z)}{(z-\phi)} \tag{6.39}$$

因此，全部输出的 z 变换为

$$x(z) = \frac{zx(0)}{(z-\phi)} + \frac{bu(z)}{(z-\phi)} \tag{6.40a}$$

或

$$zx(z) = \phi x(z) + zx(0) + bu(z) \tag{6.40b}$$

其中，式 (6.40b) 是差分方程 (6.29) 的 z 变换，在形式上它与连续系统的拉普拉斯变换方程式 (6.27) 相同.

可以很容易地把上面导出的原理推广到多变量系统，就象在第一章所做的那样，对一个纯离散系统有

$$z\boldsymbol{x}(z) = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x}(z) + z\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(z) \tag{6.41}$$

而对一个具有连续部分的系统，有

$$z\boldsymbol{x}(z) = \boldsymbol{\Phi}(T)\boldsymbol{x}(z) + z\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{\theta}(T)\boldsymbol{u}(z) \tag{6.42}$$

一般的表示方法如图 6.5 (d) 所示，图中 $\boldsymbol{I}z^{-1}$ 表示每个状态变量有单独的延迟单元. 可以把 z 变换方程 (6.42) 写为

$$\boldsymbol{x}(z) = [z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi}(T)]^{-1}[z\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{\theta}(T)\boldsymbol{u}(z)] \tag{6.43}$$

在形式上它类似于纯连续系统在 s 域中的状态向量方程:

$$\boldsymbol{x}(s) = [s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}[\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)]$$

对于离散系统，可以得到和连续系统的传递函数表达式相似的一般形式，对纯离散系统有

$$\boldsymbol{x}(z) = [z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi}]^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(z) \tag{6.44}$$

对具有连续部分的离散系统有

$$\boldsymbol{x}(z) = [z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi}(T)]^{-1}\boldsymbol{\theta}(T)\boldsymbol{u}(z) \tag{6.45}$$

在每种情况下，输出 $\boldsymbol{y}$ 都是

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

如果通过矩阵 $\boldsymbol{K}$ 引进附加的负反馈 (如图 6.5 (d) 所示)，则对纯离散系统，转移矩阵改变为

$$\boldsymbol{\Phi}_c = [\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{BK}] \tag{6.46a}$$

对有连续部分的离散系统，有

$$\boldsymbol{\Phi}_c = [\boldsymbol{\Phi}(T) - \boldsymbol{\theta}(T)\boldsymbol{K}] \tag{6.46b}$$

相应的单环反馈系统转移矩阵是

$$\boldsymbol{\Phi}_c = [\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T] \tag{6.47a}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_c(T) = [\boldsymbol{\Phi}(T) - \boldsymbol{\theta}(T)\boldsymbol{k}^T] \tag{6.47b}$$

可以详细地展开式(6.44)和(6.45)的一般表达式，以便同时得到所有 z 变换的关系，而这些关系可以用零极点图画出．对于图 6.3 的由惯性环节及积分环节组成的系统，当 $T = \tau = \tau_i$ 和（见式(6.19)）

$$\boldsymbol{\Phi}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-1} \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{\theta}(T) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-1} \\ 0 & 1 - e^{-1} \end{bmatrix}$$

时，式(6.43)的详细展开式为

$$\begin{bmatrix} x_1(z) \\ x_2(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{(z-1)(z-e^{-1})} \begin{bmatrix} (z-e^{-1}) & (1-e^{-1}) \\ 0 & (z-1) \end{bmatrix} \times \left[z \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & e^{-1} \\ 0 & 1-e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \end{bmatrix} \right] \tag{6.48}$$

系统的方块图可以根据 $\boldsymbol{\Phi}(T)$ 和 $\boldsymbol{\theta}(T)$ 而画出，它表示在图 6.6 中．

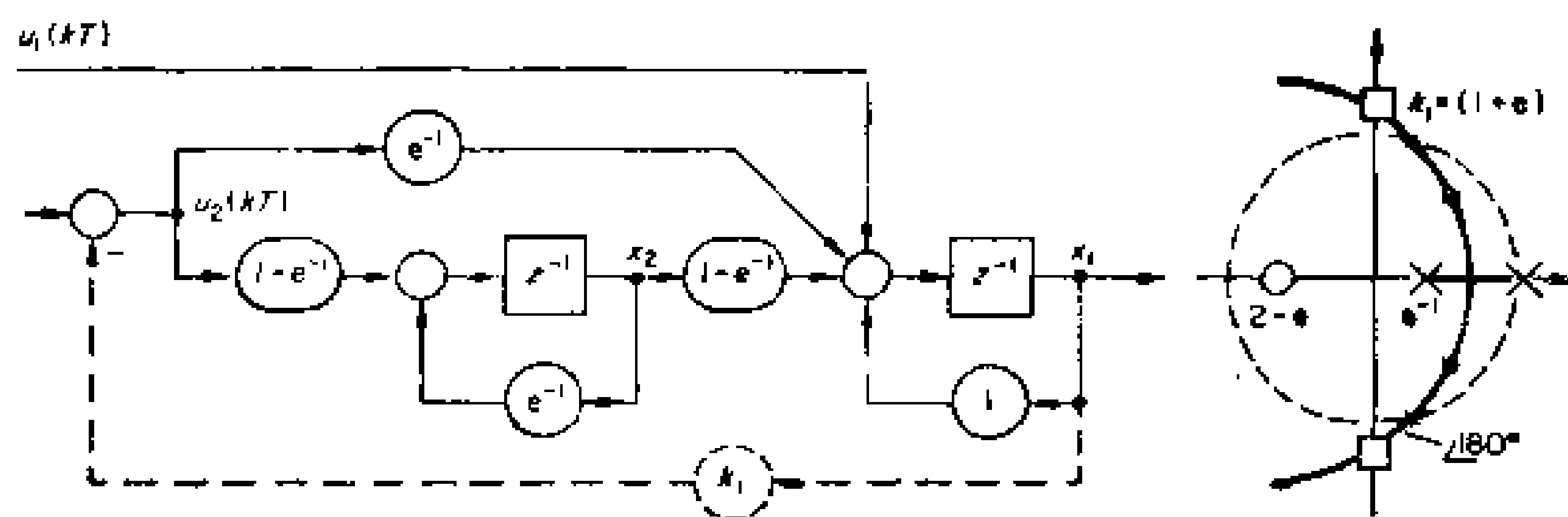


图 6.6　图 6.3 系统的离散状态变量表示图

必须注意，对于具有连续部分的离散时间系统，例如刚才介绍的例子，可以画出两种方块图．一种是图 6.1(b) 的形式，它直接表示出系统的连续部分，在原则上可以根据这个方块图求得关于

系统的连续状态变量 $x_1(t)$, $\cdots$, $x_n(t)$ 的信息. 另一种方块图是根据 z 域的状态向量方程式而画出的，如图 6.6 (或图 6.1 (a) 的一般形式)所示，这种方块图只能表示在离散时间间隔上系统的特性. 这些方块图可能有明显的差别. 例如，在图 6.3 中，u_2 仅仅加到惯性环节上，而在图 6.6 中，$u_2(kT)$ 加到离散时间表示的惯性环节和积分环节上. 这种 z 域方程式的方块图或者对应的 z 平面的图象都不能说明它们到底是根据纯离散系统还是根据具有连续部分的离散系统推导出来的.

对于刚才介绍的系统，z 平面的图象包含对应于惯性环节的极点 $z = e^{-1}$ 和对应于积分环节的极点 $z = 1$. 从式 (6.48) 或图 6.6，由 $u_2(z)$ 到 $x_1(z)$ 的传递函数求得为

$$x_1(z) = \left[\frac{e^{-1}}{z-1} + \frac{(1-e^{-1})^2}{(z-e^{-1})(z-1)}\right] u_2(z) \qquad (6.49)$$

或

$$\frac{x_1}{u_2}(z) = \frac{e^{-1}(z+e-2)}{(z-1)(z-e^{-1})} \qquad (6.50)$$

从 u_2 到 x_1 有两条并联的通道，因互相抵消而在 $z = (2-e)$ 出现零点，而 180° 线有一段是以该零点为圆心的圆弧. 图 6.6 中虚线所示的外部反馈通道 k_1 相当于把转移矩阵改变为

$$\boldsymbol{\Phi}_c(T) = \begin{bmatrix} 1-k_1e^{-1} & 1-e^{-1} \\ -k_1(1-e^{-1}) & e^{-1} \end{bmatrix} \qquad (6.51)$$

试从方块图验证，反馈通道的确使 $\boldsymbol{\Phi}(T)$ 变为 $\boldsymbol{\Phi}_c(T)$.

当 $k_1 = (1+e)$ 时，闭环转移矩阵是

$$\boldsymbol{\Phi}_c(T) = \begin{bmatrix} -e^{-1} & 1-e^{-1} \\ e^{-1}-e & e^{-1} \end{bmatrix} \qquad (6.52)$$

并可以从

$$\det[z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi}_c] = 0$$

求得特征值为

$$z = \pm j\sqrt{e-1-e^{-1}} \qquad (6.53)$$

它们是 180° 线和虚轴的交点. 因此，系统的振荡频率将是每周 $4T$，每周期的幅值增量为

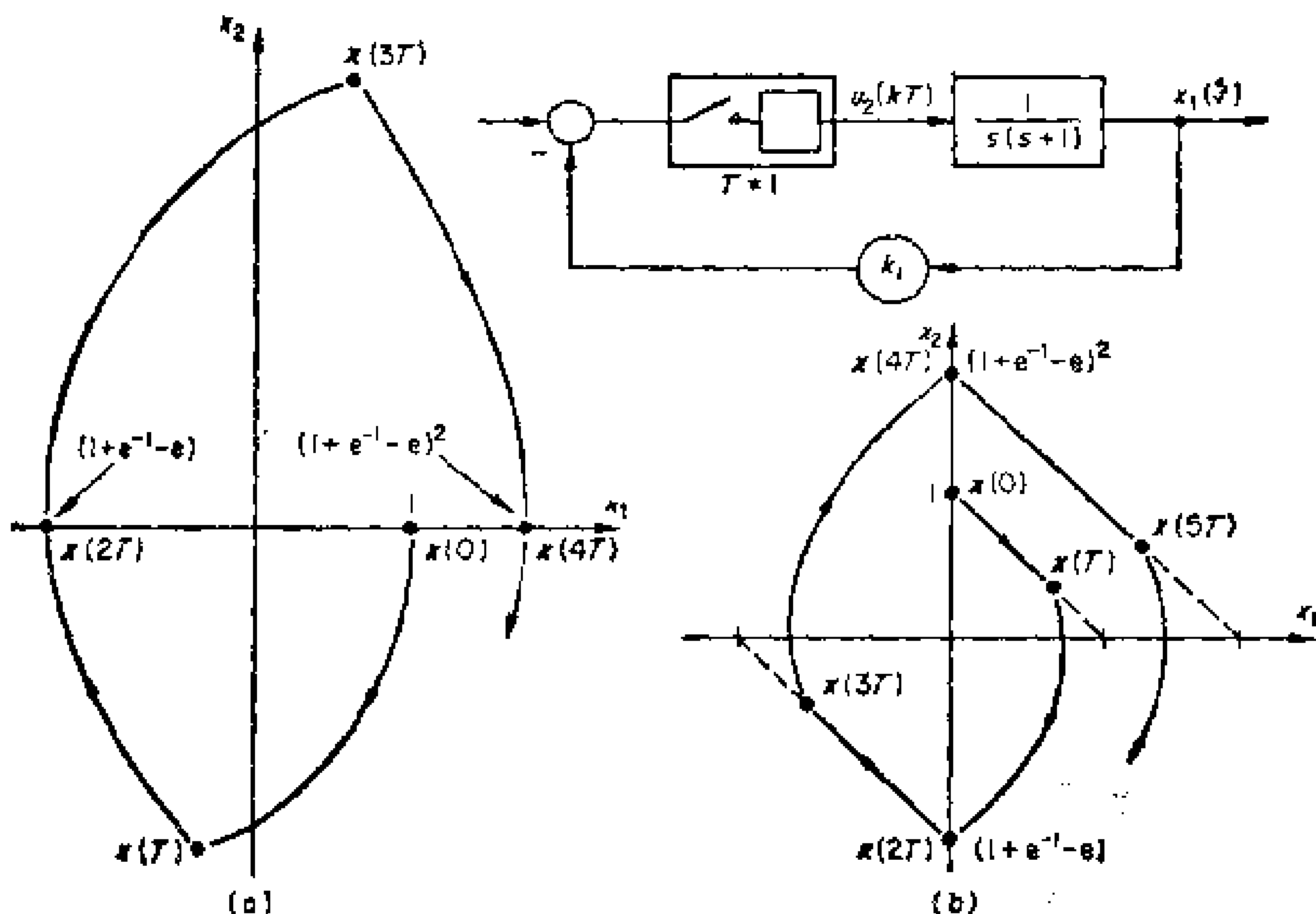


图 6.7 图 6.3 系统的闭环轨迹：(a) u_2 (kT) 不等于零；(b) u_2 (kT) 有零值

$$|z|^4=(e-1-e^{-1})^2 \tag{6.54}$$

振荡频率和幅值增量是系统的基本特性，并且不受初始条件的影响，但是，连续轨迹的形状却颇受初始条件的影响．当初始条件为

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix};\ \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \tag{6.55}$$

时，其连续轨迹分别如图 6.7 所示．在图 6.7(a) 中，由于 $x_1(kT)\neq 0$，总是存在一个输入 $u_2(kT)$，但在图 6.7 (b) 中，当 $k=0$，2，4，…时，$x_1(kT)=0$，系统没有输入，故得到一条直线形的初始条件轨迹线．然而，对于这两种情况(或任意其它的初始条件)，振荡频率和幅值增加都是相同的．虽然转移矩阵给出了特定条件下的关于系统特性的详细信息，但是，在讨论反馈增益 k_1 的变化对系统特性的影响时，用转移矩阵描述系统就不如用根轨迹法那样方便．根据根轨迹曲线，可以容易地估计，比方说，使 180° 线上的极点位于 ±60° 所需的 k_1 值 ($k\approx 1.4$)，对应的振荡周期为 $6T$．

为了从转移矩阵估算反馈增益，就需要决定 k_1 以使

$$\Phi_c^3(T) = -\mu I$$

式中，μ 是三次转移后的幅值衰减率.

6.5 状态变量分析的应用

前几节已概述了离散时间系统的一般特性，由于这些系统可以用状态向量方程表示，所以在连续系统中叙述的特征值、特征向量以及典型系统等概念都可引用到离散时间系统中来.

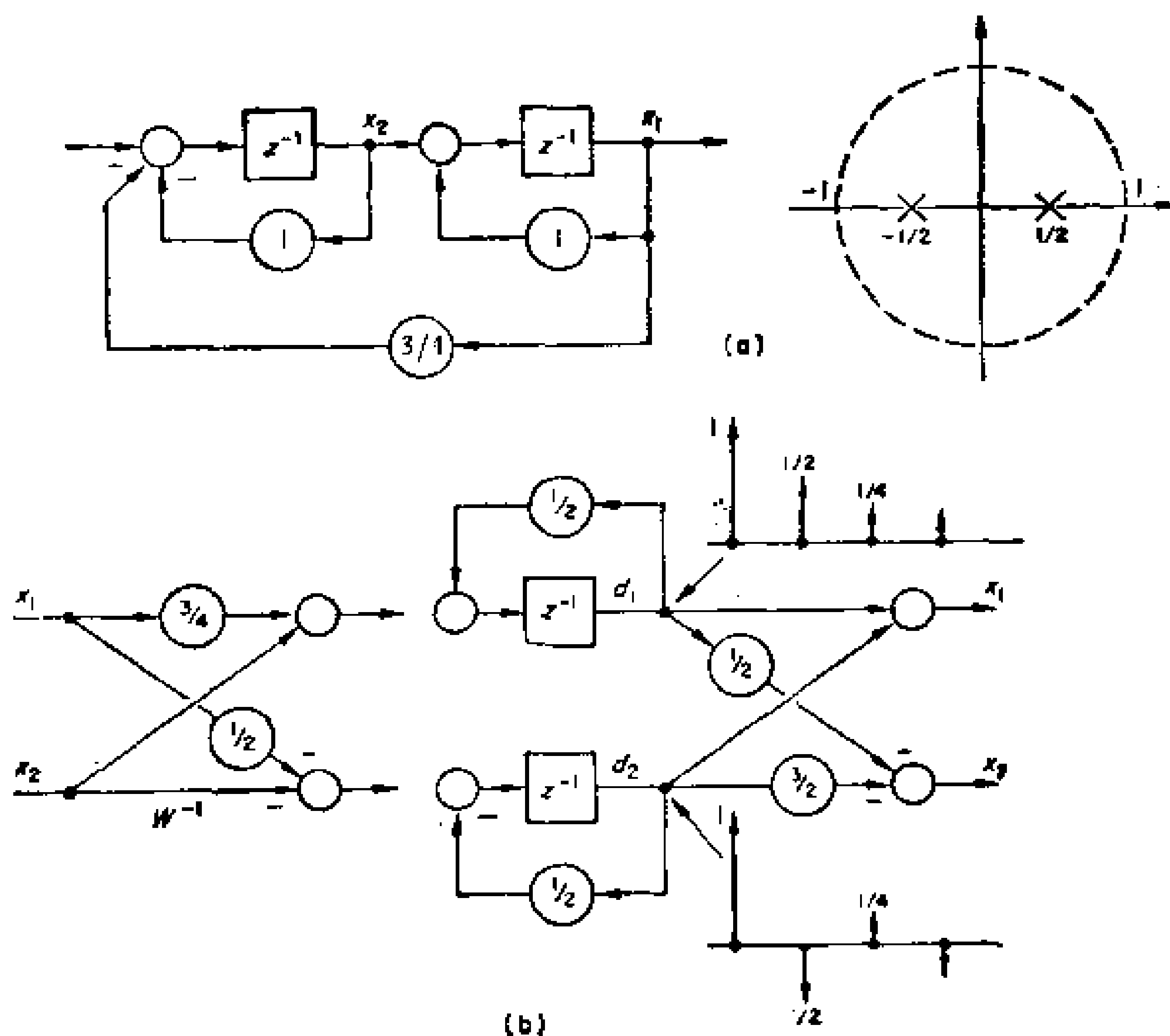


图 6.8 简单的离散时间系统；(a) 系统和 z 平面的极点；(b) 具有 W 和 W^{-1} 矩阵的典型系统

对于图 6.8 (a) 的系统，如果

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -3/4 & -1\end{bmatrix} \tag{6.56}$$

则由

$$\det[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Phi}]=0$$

写出特征方程式是

$$(z-1)(z+1)+\frac{3}{4}=\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)=0 \tag{6.57}$$

由此得到两个极点 $z=\pm\frac{1}{2}$，如图示．这两个极点或特征值表示固有振型序列中把每拍的值乘以1/2或－1/2就是下一拍的值．像连续系统那样，固有振型的分布是由特征向量给出的，后者可由正规的关系式

$$\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{w}_k=\lambda_k\boldsymbol{w}_k$$

求出．在此系统中，对于 $\lambda=+\frac{1}{2}$，上式就写成

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ -3/4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ w_{21}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ w_{21}\end{bmatrix};$$

因此

$$\boldsymbol{w}_1=\begin{bmatrix}1\\ -1/2\end{bmatrix} \tag{6.58}$$

而对于 $\lambda=-1/2$ 则得到

$$\boldsymbol{w}_2=\begin{bmatrix}1\\ -3/2\end{bmatrix}$$

所以

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1/2 & -3/2\end{bmatrix};\ \mathbf{W}^{-1}=\begin{bmatrix}3/2 & 1\\ -1/2 & -1\end{bmatrix} \tag{6.59}$$

典型系统可由

$$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{W}$$

求取，得到

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & -1/2\end{bmatrix} \tag{6.60}$$

图 6.8 (b) 画出了典型系统及特征向量图；正像所预料的那样，有两个独立的振型发生器. 图 6.9 (a) 画出了特征向量. 对于任何初始条件下的状态序列，可以由特征向量和固有振型求得，正如在连续系统中用过的方法那样. 对于初始条件

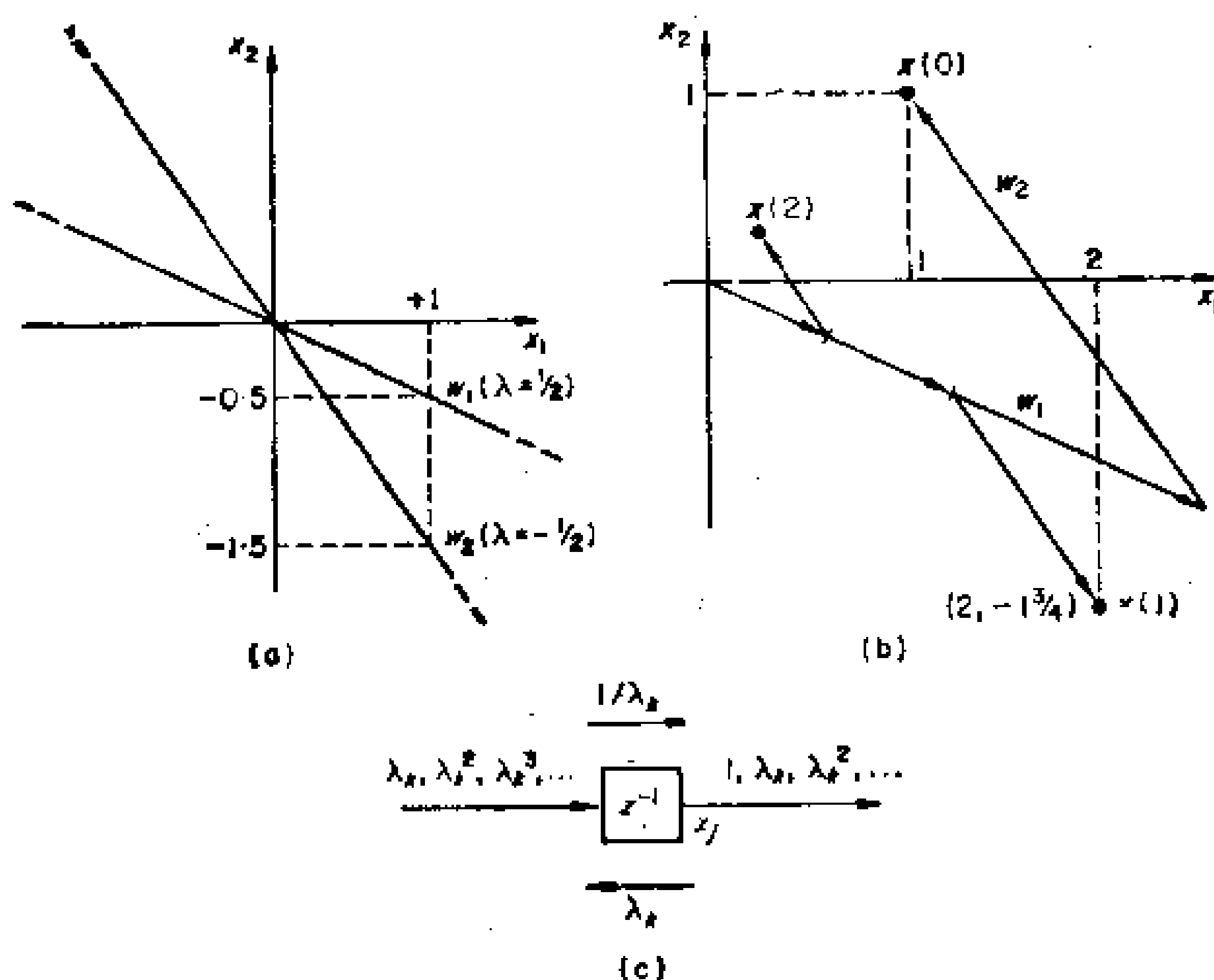


图 6.9 特征向量和固有振型：(a) 特征向量；(b) 达到 $x(0)$ 的特征向量分量；(c) 跨越延迟单元的振型传递系数

$$x(0)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

由式 (6.56) 可得到状态序列，即

$$x(1)=\begin{bmatrix}2\\-7/4\end{bmatrix};\ x(2)\begin{bmatrix}1/4\\1/4\end{bmatrix} \tag{6.61}$$

分析沿各个特征向量的分量也可得到这些结果，如图 6.9 (b) 所示.

还可以由系统中固有振型的分布求取特征向量，因为对于一个振型 λ_k 来说，如图 6.9 (c) 所示，延迟单元 x_j 的输出的相对

数值如下，

$$x_j(0) \quad x_j(1) \quad x_j(2)\cdots x_j(n)\cdots \tag{6.62a}$$
$$1 \quad \lambda_k \quad \lambda_k^2 \cdots \lambda_k^n \cdots$$

与此对应的输入值是

$$x_j(1) \quad x_j(2) \quad x_j(3)\cdots x_j(n+1) \tag{6.62b}$$
$$\lambda_k \quad \lambda_k^2 \quad \lambda_k^3 \cdots \lambda_k^{n+1}$$

因此，跨越一个延迟单元的正向和反向传递系数将分别是

$$1/\lambda_k; \quad \lambda_k$$

按此原理，由图 6.8(a) 可得到式(6.59)中的 $\boldsymbol{W}$ 值.

零 特 征 值

零特征值相当于典型系统中的延迟单元(z^{-1})没有自反馈．在典型系统中的这种延迟单元的任何初始值都将通过相应的特征向量给出一个 x 分量的初始值．但是，在第一次转移之后，典型系统的这个分量和 $\boldsymbol{x}$ 中对应的分量都消失了．例如，对于

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \tag{6.63}$$

的系统有

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 1; \quad \lambda_3 = -1; \quad \boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{6.64}$$
$$\quad\quad\quad\quad (\lambda_1)\ (\lambda_2)\ (\lambda_3)$$

经第一次转移后，在 $\boldsymbol{x}$ 中的任何 $\boldsymbol{w}_1$ 分量都消失掉．因此，对任何 $\boldsymbol{x}(0)$，以后的 $\boldsymbol{x}(1)$，$\boldsymbol{x}(2)$，$\cdots$都位于 $\boldsymbol{w}_2$，$\boldsymbol{w}_3$ 所确定的平面上．建议读者试作出式(6.63)的方块图，并验证 $\boldsymbol{w}_1$ 表示经第一次转移后就消失的状态.

给定 $\boldsymbol{x}(k)$，一般说来，前面的状态 $\boldsymbol{x}(k-1)$ 可由

$$\boldsymbol{x}(k-1) = \boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{x}(k)$$

求得．然而，由于有零特征值时 $\boldsymbol{\Phi}$ 不是满秩的(参看附录 2)，即

$\boldsymbol{\Phi}^{-1}$ 是奇异的，所以不能计算出 $\boldsymbol{x}(k-1)$. 这和下面的事实是相符的，即 $\boldsymbol{x}(k-1)$ 可能包含有一个 $\boldsymbol{w}_1$ 分量，这个分量是不能由已知的 $\boldsymbol{x}(k)$ 来确定的.

复数特征值

离散时间系统可以有复数特征值，它和复数极点对应，而且一般是表示一个振荡的状态序列. 像在连续情况那样，可以用复数特征值和典型系统来分析这种系统，或者求得纯实数表示形式后再进行分析.

具有

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}1/2 & 1\\ -5/4 & -1/2\end{bmatrix} \tag{6.65}$$

和

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

的系统给出无阻尼振荡的状态序列，每周期有四次转换：

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3/2 & -1 & -3/2 & 1\cdots\\ 1 & -7/4 & -1 & 7/4 & 1\cdots\end{bmatrix} \tag{6.66}$$

$$\boldsymbol{x}(0) \qquad\qquad\qquad\qquad \boldsymbol{x}(4)$$

这个系统具有虚特征值 $\lambda=\pm j$，它对应于单位圆上的两个极点(图 6.10 (a))，而固有振型序列$1, \lambda, \lambda^2, \cdots$就是

$$\begin{aligned}(\lambda=+j)&: 1,\ +j,\ -1,\ -j,\ 1,\ \cdots\\ (\lambda=-j)&: 1,\ -j,\ -1,\ +j,\ 1,\ \cdots\end{aligned} \tag{6.67}$$

由

$$\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{w}_k=\lambda_k\boldsymbol{w}_k$$

可求出特征向量，并得到

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ (-1+j2)/2 & (-1-j2)/2\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{W}^{-1}=\begin{bmatrix}(2-j)/4 & -j/2\\ (2+j)/4 & j/2\end{bmatrix} \tag{6.68}$$

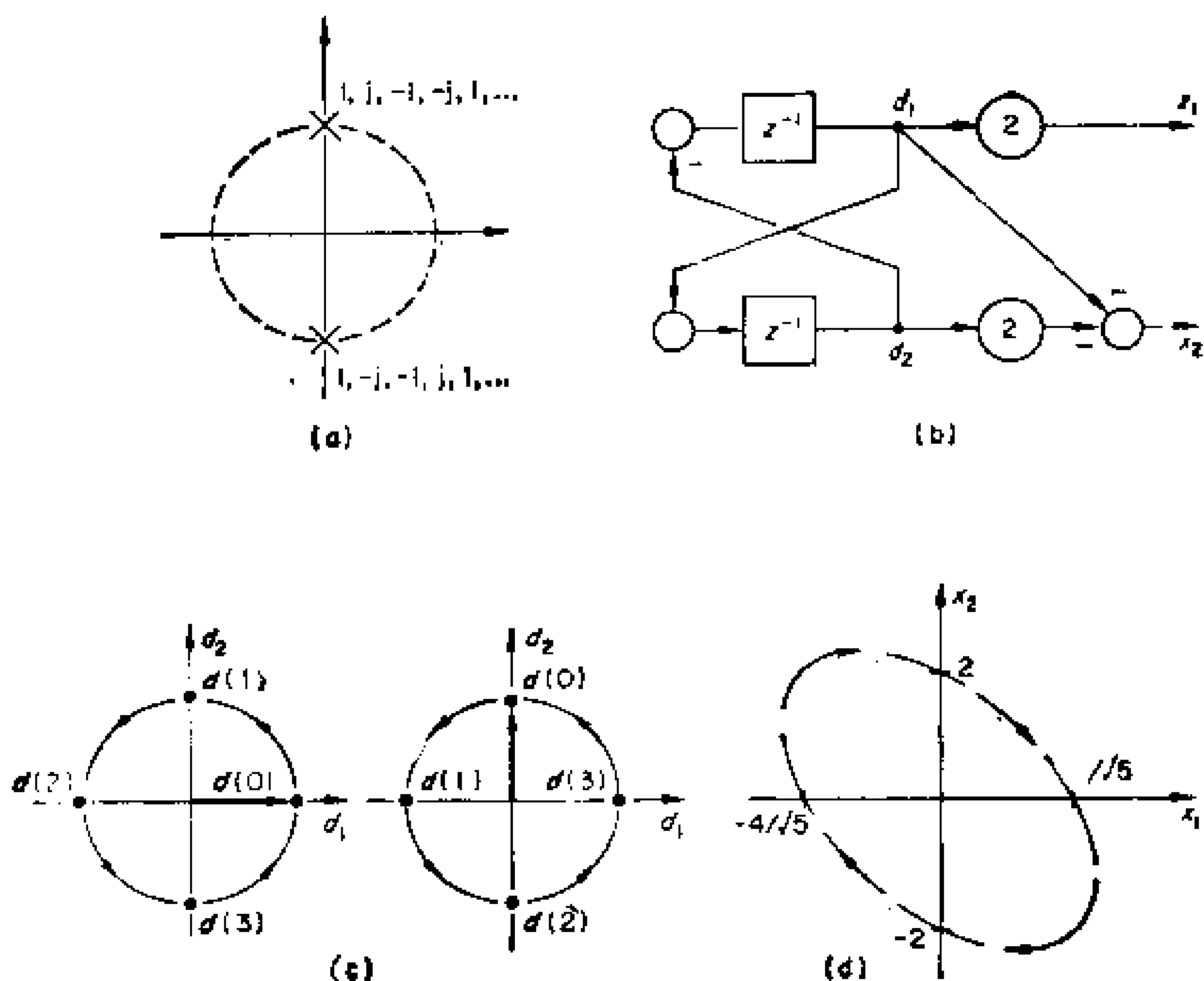


图 6.10 复特征向量：(a) z 平面极点；(b) 典型系统和 W 矩阵；(c) d 平面中的状态序列；(d) x 平面中的状态轨迹

因此，一般的响应可写为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (1, +j, -1, \cdots)\begin{bmatrix} 1 \\ (-1+j2)/2 \end{bmatrix}$$

$$\times [(2-j)/4 \quad -j/2]\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + (1, -j, -1, \cdots)$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 \\ (-1-j2)/2 \end{bmatrix}[(2+j)/4 \quad j/2]\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \tag{6.69}$$

经过简单而冗长的演算后，由式(6.69)得出一个纯实数的 x 表示式

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (1, 0, -1, 0, 1, \cdots)\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$+ (0, 1, 0, -1, 0, 1, \cdots)\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -5/4 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \tag{6.70}$$

由此得到直接由转移矩阵求得的式(6.66)的状态序列.

为了求得典型系统纯实数的表达式,考虑式(6.69)的 z 变换,假定 $d_1(0) = d_2(0) = 1$,则得

$$\begin{bmatrix} x_1(z) \\ x_2(z) \end{bmatrix} = \frac{z}{(z-j)}\begin{bmatrix} 1 \\ (-1+j2)/2 \end{bmatrix} + \frac{z}{(z+j)}\begin{bmatrix} 1 \\ (-1-j2)/2 \end{bmatrix} \tag{6.71}$$

如果像式(2.103)~(2.106)那样,把特征向量分成实分量和虚分量,则式(6.71)可写为

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_1(z) \\ x_2(z) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}\left(\frac{z}{(z-j)} + \frac{z}{(z+j)}\right) + j\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\left(\frac{z}{(z-j)} - \frac{z}{(z+j)}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\frac{z^2}{(z^2+1)} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}\frac{z}{(z^2+1)}\end{aligned} \tag{6.72}$$

右边两项 z 变换式对应于式(6.70)中的两个实数序列,而这两个向量可取为特征向量,得到

$$\boldsymbol{W}_r = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{W}_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & -1/2 \end{bmatrix} \tag{6.73}$$

由

$$\boldsymbol{\Lambda}_r = \boldsymbol{W}_r^{-1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{W}_r$$

可得典型系统,即由

$$\boldsymbol{\Lambda}_r = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.74}$$

可得到图 6.10(b)的系统. 在 d_1 或 d_2 处的单位初始条件产生的序列如下:

$$\begin{cases} d_1 = 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots \\ d_2 = 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ \cdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 = 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ \cdots & (6.75\text{a}) \\ d_2 = 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots & (6.75\text{b}) \end{cases}$$

这些状态都落在 $\boldsymbol{d}$ 的单位圆上，它们可通过 $\boldsymbol{W}$ 转换成 $\boldsymbol{x}$ 状态。一般初始条件 $\boldsymbol{d}(0)$ 给出四个点，它们等距地分布在半径为 $|\boldsymbol{d}_0|$ 的圆上．如果采用上述初始条件

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

的话，则可以验证，整个序列排列于 $\boldsymbol{d}$ 的一个圆上，且通过 $\boldsymbol{W}$ 转换成式（6.66）的序列．由

$$\boldsymbol{d}^T\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{d}=1 \quad 或 \quad \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{d}=1 \tag{6.76}$$

给定的 $\boldsymbol{d}$ 的单位圆转换成由

$$\boldsymbol{x}^T[\boldsymbol{W}_r^{-1}]^T\boldsymbol{W}_r^{-1}\boldsymbol{x}=1 \tag{6.77}$$

给定的 $\boldsymbol{x}$ 上的椭圆，如图 6.10（d）所示，由式（6.73）得到此椭圆方程式是

$$5x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2=16 \tag{6.78}$$

所有状态序列都将位于椭圆的四个点上．把特征向量分成实的和虚的分量的原理可扩展到具有一般复特征值 $\lambda=\pm a\pm jb$ 的系统中去，而且将给出一个表示具有内反馈的两个交叉耦合延迟单元的典型系统：

$$\boldsymbol{\Lambda}_r=\begin{bmatrix}\pm a&-b\\b&\pm a\end{bmatrix}$$

这是图 2.16（a）的 z 域的形式．在 $\boldsymbol{d}$ 上的状态序列排列在一条指数螺线上．

重 特 征 值

对重特征值可采用与连续系统相同的一般原理，重特征值表示一些有局部耦合的固有振型．典型系统的相应部分是由振型发生器串联组成的约当形式．

图 6.11（a）所示的

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}0&1\\-1/4&1\end{bmatrix} \tag{6.79}$$

是一个简单的例子，它的特征方程是

$$(z-1/2)^2=0 \tag{6.80}$$

特征值是

$$\lambda=1/2,\ 1/2 \tag{6.81}$$

它们对应于重极点 $z=1/2$. 由重特征值的关系式(2.142)

$$\boldsymbol{\Phi w}_1=\lambda \boldsymbol{w}_1$$

$$\boldsymbol{\Phi w}_2=\lambda \boldsymbol{w}_2+\boldsymbol{w}_1$$

可计算出特征向量：

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1/2 & 3/2\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{W}^{-1}=\begin{bmatrix}3/2 & -1\\ -1/2 & 1\end{bmatrix} \tag{6.82}$$

从而求得典型系统是

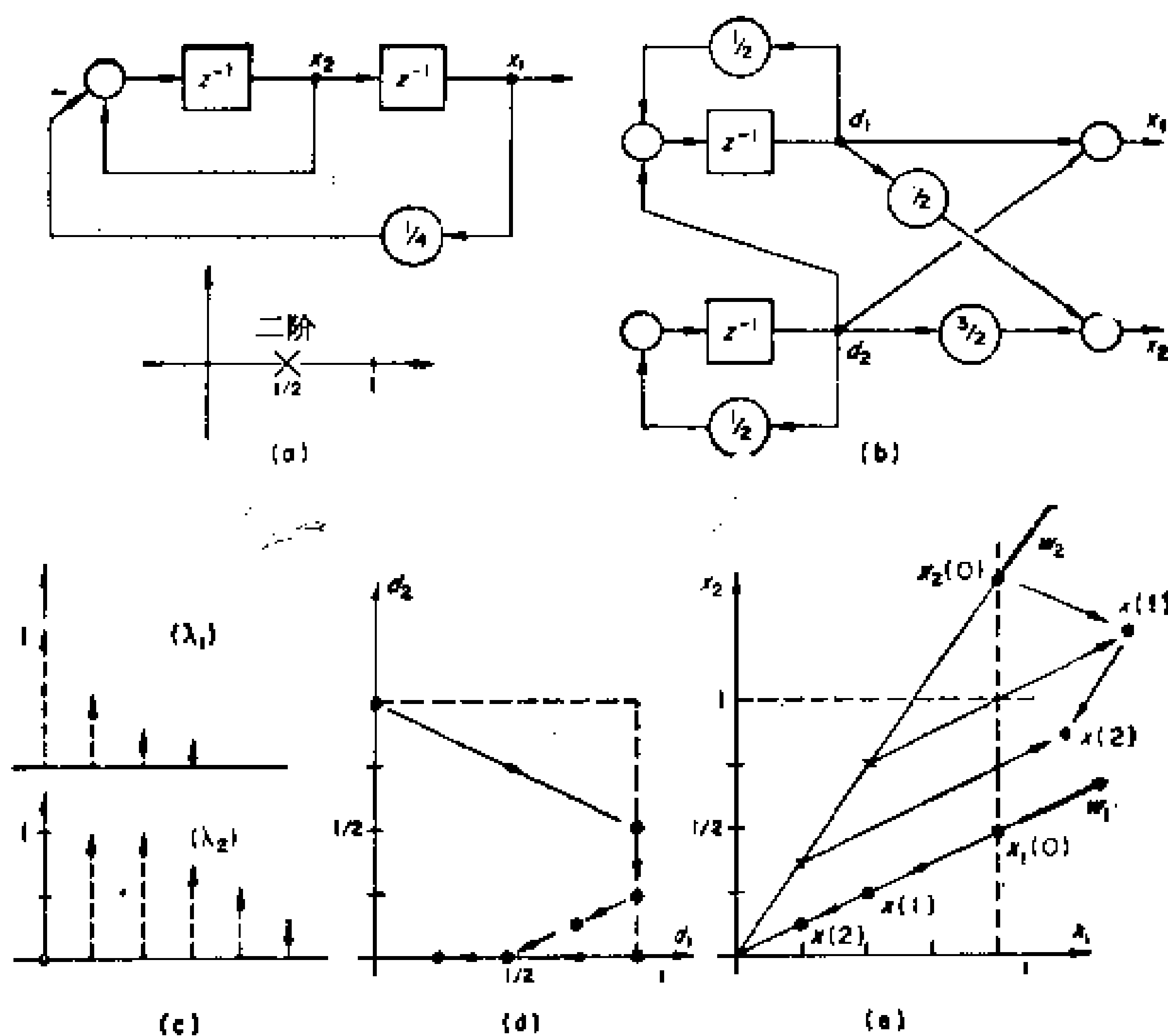


图 6.11　重特征值：(a) 系统；(b) 典型系统；(c) 固有振型；(d) $\boldsymbol{d}$ 平面轨迹；(e) 特征向量和 $\boldsymbol{x}$ 轨迹

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \tag{6.83}$$

这正是所预料的结果(参看图 6.11 (b)).

在 d_1 的单位初始条件产生如下序列

$$d_1: \ 1, \ 1/2, \ 1/4, \ 1/8, \ \cdots \quad (\lambda_1) \tag{6.84a}$$

$$d_2: \ 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ \cdots \tag{6.84b}$$

这里,(λ_1) 如图 6.11 (c) 所示是指数式的,而且给出在图 6.11 (d) 中仅沿着 d_1 的状态. 在 d_2 的单位初始条件产生

$$d_2: \ 1, \ 1/2, \ 1/4, \ 1/8, \ \cdots \quad (\lambda_1) \tag{6.85a}$$

$$d_1: \ 0, \ 1, \ 1, \ 3/4, \ 1/2, \ 5/16, \ \cdots (\lambda_2) \tag{6.85b}$$

d_1 序列是由 d_1 本身的反馈循环和 d_2 加进的输入的组合而产生的. 这两组序列(见图 6.11 (c))表示系统的两种固有振型. 指数振型 (λ_1) 可以单独在 d_1 产生,但是,在 d_1 的第二个振型 (λ_2) 则只能和在 d_2 的 (λ_1) 一起产生. 图 6.11 (d) 中表示了 $d_2(0)=1$ 时 (λ_2) 的 $\boldsymbol{d}$ 平面序列. 一般的特性类似于连续系统的特性.

图 6.11 (c) 画出这两个特征向量; $\boldsymbol{w}_1$ 对应于由 $x_1(0)$ 单独在 d_1 产生的指数振型 (λ_1),或者对应于当在 d_2 处产生具有特征向量 $\boldsymbol{w}_2$ 的指数振型时在 d_1 出现的第二个振型 (λ_2). 初始条件

$$x_2(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix} \tag{6.86}$$

产生的状态序列是

$$x_1: \ 1, \ 3/2, \ 5/4, \ \cdots \tag{6.87a}$$

$$x_2: \ 3/2, \ 5/4, \ 7/8, \ \cdots \tag{6.87b}$$

它可由 $\boldsymbol{\Phi}$ 求得,或根据能达到 $\boldsymbol{x}(0)$ 的特征向量分量来求得.

对于

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.88}$$

建议读者通过特征向量的分量确定状态序列,并与转移矩阵序列对照进行校验.

6.6 能控性和能观测性

在连续系统中论述过的能控性和能观测性的一般概念和思想(第五章)都可应用到离散时间系统中来，而且可用类似方法进行讨论．单输入系统的状态由下式给出：

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{\Phi}^{k-1}\boldsymbol{b}u(0)+\cdots+\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{b}u(k-2)+\boldsymbol{b}u(k-1)$$

这可用矩阵形式表示为

$$\boldsymbol{x}(k)=[\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{b}\cdots\boldsymbol{\Phi}^{k-1}\boldsymbol{b}]\begin{bmatrix}u(k-1)\\ \vdots\\ u(0)\end{bmatrix} \tag{6.89a}$$

$$=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}u(k-1)\\ \vdots\\ u(0)\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{u} \tag{6.89b}$$

$\boldsymbol{P}$ 阵各列对应着各个方向，每一工作节拍的输入 $u(0),\cdots,u(k-1)$ 可以使状态 $\boldsymbol{x}(k)$ 分别沿这些方向得到相应大小的一个分量．如果各列是独立的，则系统是(完全)能控的，而将状态调整到任意数值 $\boldsymbol{x}(k)$ 所需的输入序列可由下式确定：

$$\begin{bmatrix}u(k-1)\\ \vdots\\ u(0)\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}(k) \tag{6.90}$$

因此一个 n 维系统可以用 n 个适当的输入驱动到任何状态，如果 $\boldsymbol{P}$ 阵是满秩的话．对于具有连续部分的系统，用 $\boldsymbol{\Phi}^{i}(T)$ 代替 $\boldsymbol{\Phi}^{i}$，用 $\boldsymbol{\theta}(T)$ 代替 $\boldsymbol{b}$，即可引用上述结论．

可以像纯连续系统那样来研究能观测性，即求得一个矩阵 $\boldsymbol{Q}$，由它的逆阵可从输出 y 的观测值得到 $\boldsymbol{x}$．输出序列是

$$\begin{aligned}y(0)&=\boldsymbol{c}^{T}\boldsymbol{x}(0)\\ y(1)&=\boldsymbol{c}^{T}\boldsymbol{x}(1)=\boldsymbol{c}^{T}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x}(0)\\ &\ \ \vdots\\ y(k-1)&=\boldsymbol{c}^{T}\boldsymbol{\Phi}^{k-1}\boldsymbol{x}(0)\end{aligned} \tag{6.91}$$

或

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^T \\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{\Phi} \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{\Phi}^{k-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(0) \tag{6.92}$$

因此，当给出一组输出序列 $y(0), \cdots, y(k-1)$ 时，如果 $\boldsymbol{Q}$ 是满秩的，则这系统的初始状态可由下式求得：

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{Q}^{-1} \begin{bmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y(k-1) \end{bmatrix} \tag{6.93}$$

于是系统就是能观测的．对于具有连续部分的系统，则用 $\boldsymbol{\Phi}^i(T)$ 来代替 $\boldsymbol{\Phi}^i$．像对连续系统那样，可以用式(6.89)和(6.92)来证明，能控性(能观测性)要求所有振型都能被激励(被观测到)．

能控性和能达性

对于具有零特征值的系统，它的使状态分量消失的特性(参看式(6.63)等)对能控性条件起着一定的影响，这里涉及到所谓**能达性**的概念．能达性考虑的是系统能否由序列(参看式(6.90))

$$[u(k-1), \cdots, u(0)]^T = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}(k)$$

把系统从原点驱动到任何状态 $\boldsymbol{x}(k)$．如果 $\boldsymbol{P}$ 阵是满秩的，则任何状态都可达到，而且系统是(完全)能达的．能控性研究是否能把一个任意状态驱动到原点，如果系统是完全能达的，则它就是完全能控的．然而，有零特征值的系统可以不是完全能达的，但却可以是完全能控的．这种情况的出现是由于(参看式(6.63))在第一次转移后，状态将处在一个平面上，如果这个系统在此平面上是能控的，则此状态便可驱动到原点，因而系统是能控的．让我们分别在

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.94}$$

情况下讨论式(6.63)的能达性和能控性. 对于 $\boldsymbol{b}_1$，系统既不能达也不能控，而对于 $\boldsymbol{b}_2$，系统是能控的但是不能达的. 证明 $\lambda=1$，-1 的特征向量都在一个能控的平面上，就可验证能控性.

采样频率的影响

在包括有振荡振型的连续部分的离散时间系统中，如果采样时间间隔 T 等于振型的若干个半周期的话，则这个振型将变成不能控的和不能观测的. 在连续部分，由振荡振型决定的时间响应将是如下的形式：

$$e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\phi)$$

相应的 z 变换是

$$F(z)=\frac{z\{z\cos\phi-e^{-\alpha T}\cos(\beta T-\phi)\}}{z^2-2ze^{-\alpha T}\cos\beta T+e^{-2\alpha T}} \tag{6.95}$$

此式在实轴上有一对复数极点和一个零点. 如果

$$\beta T=n\pi,\quad n=1,\ 3,\ 5,\cdots \tag{6.96}$$

则两极点和零点在负实轴上重合，相消后剩下一个单极点：

$$F(z)=\frac{\cos\phi(z+e^{-\alpha T})}{(z+e^{-\alpha T})^2}=\frac{\cos\phi}{(z+e^{-\alpha T})} \tag{6.97}$$

如果

$$\beta T=n\pi,\quad n=2,\ 4,\ 6,\cdots \tag{6.98}$$

则两极点和零点在正实轴上重合，且

$$F(z)=\frac{\cos\phi}{(z-e^{-\alpha T})} \tag{6.99}$$

在这两种情况中，都有一个极点被零点抵消掉. 如果 $\phi=\pi/2$，则式(6.97)和(6.99)都化为零，因为这一振荡分量是正弦波且在采样瞬时通过零点(参看作为例子的习题6.18).

离散时间系统的状态变量分析采用了在第二章中对连续系统研究过的所有概念，而且离散时间系统有着和连续系统完全同样的一般状态变量特性. 这里出现了某些另外的特征，例如采样间隔的变化对能控性和能观测性的影响，以及零特征值表示状态向量分量在一次转移之后即化为零的情况等. 在线性连续系统中，

则没有类似的影响存在．本章采用的资料都是在第一章末的参考书目中列出了的．下面给出的资料供读者扩大视野．

参考文献

Freeman, H. F., *Discrete Time Systems* (Wiley, New York, 1965).

Jury, E. I., *The Treory and Application of the z-transform Method* (Wiley, New York. 1964).

Kuo, B. C., *Discrete-data Control Systems* (Prentice-Hall, Enplewood Cliffs, N.J., 1970).

习题

6.1 对于系统

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}3/4 & 5/4\\5/4 & 3/4\end{bmatrix};\quad 与\ \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1025\\-1023\end{bmatrix}$$

在 $k=1,\cdots,10$ 的范围里，求出 $\boldsymbol{x}(k)$．由 $\det[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Phi}]=0$ 确定系统的极点，并且验证，序列 $\boldsymbol{x}(k)$ 显示出从系统的极点可料到的一般特性．

$$\left(\boldsymbol{x}(10)=\begin{bmatrix}1025\\1023\end{bmatrix};\ \begin{matrix}\boldsymbol{x}(k+1)\approx-[\boldsymbol{x}(k)]/2 & 对于小的\ k\ 值\\ \boldsymbol{x}(k+1)\approx2[\boldsymbol{x}(k)] & 对于大的\ k\ 值\end{matrix}\right)$$

6.2 对于系统

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}-1/4 & 3/4\\3/4 & -1/4\end{bmatrix}$$

确定该系统的极点，从而得到系统的固有振型序列的形式．当初始条件为

$$\begin{bmatrix}16\\0\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}16\\16\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}0\\16\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}16\\-16\end{bmatrix},$$

考虑到系统方块图中的数值，利用 $\boldsymbol{\Phi}$ 来求出当 $k\leqslant3$ 时的 $\boldsymbol{x}(k)$。判断哪些初始条件只激发出单一的振型．求出特征向量，并且验证只激发单一振型的初始条件位于某个特征向量上．

（极点 $z=-1,\ 1/2$；第二、四个初始条件在特征向量上）

6.3 对于系统

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}1 & 1\\\phi_{21} & 0\end{bmatrix}$$

当 $\phi_{21}=-1/2,\ -1,\ -1.5$ 时确定系统的极点．对于这些 ϕ_{21} 值和初始条件

$$x(0)=\begin{bmatrix}8\\0\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}8\\8\end{bmatrix}$$

求出 $k=1,\cdots,6$ 时的 $x(k)$ 值，并在 x 平面上画出 $x(k)$。对于 $\phi_{21}=-1/2$，-1，在序列中，是否在几对值之间具有一个由极点位置可预料到的简单关系式？对于 $\phi_{21}=-1.5$，序列的特征是否如通常所料的那样？

$$\left(\begin{array}{ll}\phi_{21}=-1/2, & \text{极点在 } z=(1\pm j1)/2;\ x(k+4)=-(x(k))/4\\ \phi_{21}=-1, & \text{极点在 } z=(1\pm j2)/2;\ x(k+3)=-x(k)\\ \phi_{21}=-1.5, & \text{系统不稳定}\end{array}\right)$$

6.4 对于连续系统

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & -3\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

u_1 和 u_2 是从采样保持单元得到的。试确定转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(T)$ 和控制矩阵 $\boldsymbol{\theta}(T)$。画出离散系统的方块图，并与连续系统的方块图比较。试验证，$\boldsymbol{\theta}(\infty)$ 就是把单位阶跃加到连续系统的适当输入端时的稳态响应。

$$\left(\begin{array}{l}\boldsymbol{\Phi}(T)=\begin{bmatrix}e^{-T}(2-e^{-T}) & e^{-T}(1-e^{-T})\\ 2e^{-T}(e^{-T}-1) & e^{-T}(2e^{-T}-1)\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{\theta}(T)=\begin{bmatrix}-2e^{-T}+\{(3+e^{-2T})/2\} & \{(1+e^{-2T})/2\}-e^{-T}\\ (2e^{-T}-e^{-2T}-1) & e^{-T}(1-e^{-T})\end{bmatrix}\end{array}\right)$$

6.5 对于连续系统

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

u 是从采样保持单元供给的，当 $T=\pi/4$ 时，试求出 $\boldsymbol{\Phi}(T)$ 和 $\boldsymbol{\theta}(T)$。同时，求出从采样器输出端到 x_1^* 的传递函数

$$F(z)=\frac{x_1}{u}(z)$$

并且在 z 平面上绘出极点。试验证这些极点正是从 A 的固有振型中所料到的。

$$\left(\text{对于 } T=\pi/4,\ \boldsymbol{\Phi}(T)=\begin{bmatrix} e^{-T} & (\sqrt{2}-e^{-T})/2 & e^{-T}/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\right.$$

$$\boldsymbol{\theta}(T)=\begin{bmatrix} 1-e^{-T} & e^{-T}/2 & (\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)-e^{-T})/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & (\sqrt{2}-1)/\sqrt{2} \\ 0 & (1-\sqrt{2})/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\left.F(z)=\frac{(\sqrt{2}ze^{-T}+\sqrt{2}-1-e^{-T})/2\sqrt{2}}{(z-e^{-T})(z^2-z\sqrt{2}+1)}\right)$$

6.6　当 $k\to\infty$ 时，如果 $x(kT)$ 对某一输入的响应达到稳态值，这意味着：

$$x(k+1)T=x(kT),\ k\to\infty,$$

试证明稳态值满足

$$x(kT)=[I-\phi(T)]^{-1}\theta(T)u(kT)$$

并由此确定下列系统的 $x(\infty)$：

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix};\ b=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其 u 是由采样保持单元给出的，其值为

$$u(0),\ \cdots,\ u(kT),\ \cdots=1,\ \cdots,\ 1,\ \cdots$$

请代入系统方块图来说明 $x(\infty)$ 是正确的。

$$\left(x(\infty)=\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}\right)$$

6.7　设连续系统有

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ b=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其输入 $u(kT)$ 是由采样保持单元得到的。当 $T=1$ 时，确定 $\boldsymbol{\Phi}(T)$ 和 $\boldsymbol{\theta}(T)$。如果施加状态变量反馈

$$u(kT)=-[k_1k_2]x(kT)$$

请确定闭环传递矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_c(T=1)$。

$$\left(\boldsymbol{\Phi}_c(1)=\begin{bmatrix} 1-k_1/2 & 1-k_2/2 \\ -k_1 & 1-k_2 \end{bmatrix}\right)$$

6.8　对于习题 6.7，$T=1$，比较行列式

$$\det[zI-\boldsymbol{\Phi}_c]=0$$

和

$$(z-a+jb)(z-a-jb)=0$$

的系数，以确定 k_1 和 k_2 之间的关系，使闭环的极点位于 z 平面的单位圆上；此处 a 和 b 可改变，使解在单位圆上。确定 k_1 和 k_2 的值，使系统每周期有四个采样间隔。（用 $\boldsymbol{\Phi}^2(1) = -\boldsymbol{I}$；为什么？）

$$(\boldsymbol{k}^T = [2 \quad 1])$$

6.9 对于习题 6.7 和 6.8 的系统，使 $T = 1$ 和 $\boldsymbol{k}^T = [2\ 1]$（得到每周期四次采样间隔），请分析由于 $\boldsymbol{\Phi}$（不是 $\boldsymbol{\Phi}_c$）引起的 $\boldsymbol{x}(t)$ 的连续初始条件轨迹和由于 $u(k) = -\boldsymbol{\theta}(1)\boldsymbol{k}^T\boldsymbol{x}(k)$ 所引起的连续驱动响应轨迹。从而绘出在初始条件 $\boldsymbol{x}(0)$ 下，在 $0 < t < 2$ 时 $\boldsymbol{x}(t)$ 的连续的轨迹的一般形状，其中

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

并且证明，在每种情况下，循环周期都是四个采样间隔。

6.10(a) 对于系统

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1 \\ 3/16 & -1/4 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

确定特征值和特征向量。研究在每个系统的方块图里振型的分布方式，以检查结果是否正确。

用所给出的初始条件，对每个系统求出 $\boldsymbol{x}(1)$，$\boldsymbol{x}(2)$，$\cdots$，并且在 x 平面里画出各值。并验证，状态序列可由特征向量分量的和求得。

(b) 用特征向量和特征值来讨论习题 6.1 的结果。

6.11 对于系统（请看习题 6.3）

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \phi_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

其中，$\phi_{21} = -1/2$，-1，求出全实数表达式：

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{W}_r^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_r\boldsymbol{W}_r$$

当 $\phi_{21} = -1$ 时，求出与 d 单位圆相对应的 x 轨迹的表达式并作出图形。试验证，对于在 x 此轨迹上的初始条件，其后的状态都处于此轨迹上。

$$\left(\begin{array}{l} \phi_{21} = -1/2;\ \boldsymbol{\Lambda}_r = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{W}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \\ \phi_{21} = -1;\quad \boldsymbol{\Lambda}_r = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{W}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \\ x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 3 \end{array}\right)$$

6.12 对于系统

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

求出特征值和特征向量，并且求出实数典型系统 $\boldsymbol{\Lambda}_r$. 证明 $\boldsymbol{\Lambda}_r$ 与从特征值推测的形式一致.

$$\left(\boldsymbol{\Lambda}_r=\left[\begin{array}{c|cc}-1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2\\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2\end{array}\right]\right)$$

6.13 对于系统

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 3\end{bmatrix}$$

求出它的特征值和特征向量，证明其典型系统 $\boldsymbol{\Lambda}$ 有如所料的形式. 考虑 $\boldsymbol{\Phi}$ 的方块图，选择 $\boldsymbol{x}(0)$ 使在 x_1 处有 $x_1=0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\cdots$ 的抛物线序列. 求出相应的 $\boldsymbol{d}(0)$，并由 $\boldsymbol{\Lambda}$，$\boldsymbol{W}$ 方块图验证，在 x_1 得到正确的序列.

使用 $[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Phi}]^{-1}$ 和上面的 $\boldsymbol{x}(0)$ 计算出 $x_1(z)$，并且证明得到了正确的抛物线序列的 z 变换.

$$\left(\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix};\ \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 4\end{bmatrix};\ \boldsymbol{d}(0)=\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 2\end{bmatrix};\ x_1(z)=\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}\right)$$

6.14 对于矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix} \text{ 与 } \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

计算

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{y}(k),\quad k=0,\ 1,\ 2,\cdots$$

其中

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{x}(k)/x_1(k)$$

使得 $y_1(k)$ 规格化成一单位值. 对于 $k>4$，将 $x_1(k)$ 和 $\boldsymbol{y}(k)$ 的值与 $\boldsymbol{M}$ 的特征值和特征向量比较. 用行列式

$$\det[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}]=0$$

在 z 平面的极点位置来讨论这些结果，从而说明为什么得到这样的结果。用其它初始条件再试试看。

（最终由最大的特征值决定响应特性，由相应的特征向量决定其分布）

6.15　由

$$A=\begin{bmatrix}0 & k_1\\ 0 & 0\end{bmatrix};\ b=\begin{bmatrix}k_1\\ 1\end{bmatrix};\ y=[1\ \ 0]x$$

给出的连续系统具有输入 v，从 $T=1$ 的采样保持单元得到 $u(kT)$，采样保持单元的输入是 $(v-y)$。

求出包含反馈 y 的系统的 Φ，并证明 $z_1=-1$ 可以是一个与 k_2 无关的特征值。在实际系统的方块图里，选择沿着 z_1 特征向量方向的初始条件，描出系统中的连续信号，以证实振荡周期是不依赖于 k_2 的。

确定 k_2，使另一个特征值在 $z_2=-1/2$ 处，选择沿着 z_2 特征向量方向的初始条件，描出连续波形图，来证实特征值。

指出系统不能控制的 k_1 值（当 $k_1\neq 0$ 时），并且讨论从 z 域系统方块图所得到的对输入信号的响应 $x(kT)$，以证实这个结果。

$$\left(\Phi=\begin{bmatrix}1-(k_1+k_2/2) & k_2\\ -1 & 1\end{bmatrix};\ k_1=2;\ k_2=3;\right.$$

$$\left.W=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1/2 & 2/3\end{bmatrix};\ k_1=0\right)$$

6.16　对于习题 6.15 的系统，当 $k_1=0$ 和 $T=1$ 时，确定 k_2，使得到周期为四个采样间隔的振荡。

用初始条件

$$x(0)=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

绘出系统的连续波形和轨迹，从而证实振荡特征不依赖于初始条件，正如所预料的那样。

$$(k_2=4;\ 特征值\ z=\pm j\sqrt{3})$$

6.17　对于纯离散系统

$$\Phi=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1/4 & -1/4 & 0\end{bmatrix};\ y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}x$$

研究在 y_1 和 y_2 处的能观测性，并判定任何不能观测的振型。

（$z=-1/2$，在 y_2 处不能观测）

如果

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\b_1\\1\end{bmatrix};x(3)=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

且 $b_1=0$，确定得到上面 $x(3)$ 的输入序列。在一个三维的图形里，讨论能控性矩阵 P 的列在 x 的方向以校对此结果。b_1 是什么实数值时系统不能控制？考虑零点极点相消以校验其结果。

$$(u(0),\ u(1),\ u(2)=1,\ 1,\ 5/4;\ b_1=2)$$

6.18(a) 对于在输入处有采样保持单元的连续系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{b}u(kT)$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&\beta\\-\beta&0\end{bmatrix};\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\\beta\end{bmatrix}$$

求出 $\boldsymbol{\Phi}(T)$ 和 $\boldsymbol{\theta}(T)$。对采样输出 y^*（请看附录 3.4）

$$y^*=[1\ \ 0]\boldsymbol{x}^*$$

当 $\beta T=\pi/2,\ \pi,\ 2\pi$ 时，研究在 y^* 处的能观测性和能控性。

$$\left(\begin{array}{l}\boldsymbol{\Phi}(T)=\begin{bmatrix}\cos\beta T&\sin\beta T\\-\sin\beta T&\cos\beta T\end{bmatrix};\ \boldsymbol{\theta}(T)=\begin{bmatrix}1-\cos\beta T\\\sin\beta T\end{bmatrix}\\\beta T=\pi/2,\ \text{能观测、能控制}\\\beta T=\pi,\ 2\pi,\ \text{不能观测，不能控制}\end{array}\right)$$

(b) 从

$$z\boldsymbol{x}(z)=\boldsymbol{\Phi}(T)\boldsymbol{x}(z)+\boldsymbol{\theta}(T)u(z)$$

画出系统的 z 域方块图，并且通过方块图验证在习题 6.18 (a) 中，对所有 T 值能观测性和能控性结果是如所预料的。

(c) 如果保持单元的输出在 $0<t<T$ 时为单位值，对于习题 6.18(a) 的 βT 值，分析 $0<t<T$，$T<t<2T$ 时系统在 x 的轨迹。验证轨迹的端点是否对应于能控性矩阵 P 的列，并且证实能控性的结果。

(d) 在习题 6.18 (a) 中，对于 $\beta T=\pi,\ 2\pi$，用由任意 $x(0)$ 引起的在 x 的轨迹来说明由 y^* 只能确定 $x(0)$ 是在 x 的一条线上，从而证实上面关于能观测性的结论。如果 $\beta T=\pi/2$ 且 y^* 的采样序列是

$$1,\ 2,\ -1,\ -2,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

确定 $x(0)$，并且证实此序列与在 x 中系统轨迹对应。

(e) 如果 $\beta T=\pi/2$，确定为了使得

$$x(2T) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

所必需的保持单元的脉冲序列输入．讨论$\boldsymbol{P}$的列的方向，以论证结果的正确性，并画出系统轨迹线的各分量．

（脉冲序列：1/2，3/2）

第七章 离散系统的最小时间控制

离散系统的一般设计可用与连续系统同样的原理来实现，即引入补偿来改善瞬态响应和其他某些品质特性；在 Gupta 和 Hasdorff (1970) 的著作中，曾经讨论过一些方法．本章阐明状态变量分析法在研究和设计最小时间响应系统及无波动系统等特殊情况下的应用．这些系统的特点由于其离散性而突出地表现出来，而且它们的特性与许多状态变量概念有着密切的关系，此外，设计方法也与 z 平面分析原理有密切的联系．

7.1 最小时间响应系统

最小时间响应系统具有这样一个共同的性质，即其响应在 n 个采样间隔内达到终值，其中 n 是系统的维数．为了方便起见，首先讨论施加单一控制输入 $u(0)$ 可能获得的状态．经一个控制间隔后得到

$$\boldsymbol{x}(1)=\boldsymbol{\Phi x}(0)+\boldsymbol{b}u(0)$$

初始状态将变化到 $\boldsymbol{\Phi x}(0)$，而控制输入仅能沿图 7.1(a) 中与 $\boldsymbol{b}$ 向量平行的方向来改变系统的状态．倘若 $\boldsymbol{\Phi x}(0)$ 叠合于 $\boldsymbol{b}$ 上，如图 7.1 (b) 所示，那末 $\boldsymbol{x}(1)$ 可以是零：

$$\boldsymbol{0}=\boldsymbol{\Phi x}(0)+\boldsymbol{b}u(0) \tag{7.1a}$$

或者

$$\boldsymbol{x}(0)=-\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{b}u(0)=\boldsymbol{g}_0u(0) \tag{7.1b}$$

其中，$\boldsymbol{g}_0=-\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{b}$，且假定 $\boldsymbol{\Phi}$ 是可逆的．这样一来，如果 $\boldsymbol{x}(0)$ 叠合于 $\boldsymbol{g}_0$ 上，则有可能经一步就把状态引到原点．$\boldsymbol{g}_0$ 的方向按 $\boldsymbol{\Phi x}(0)$ 正好叠合于 $\boldsymbol{b}$ 来确定．因为系统是线性的，所以初始条件和控制输入的作用是相互独立的，而且可以分别地确定，然后叠加

起来.

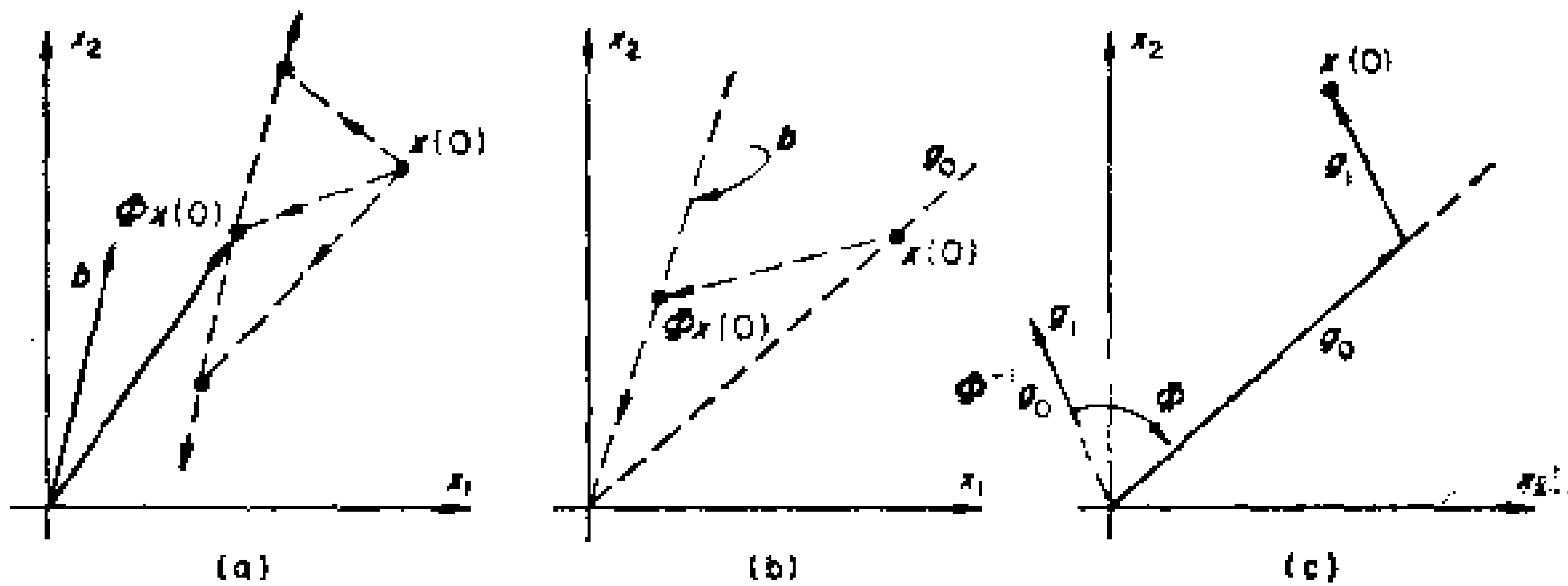


图 7.1 最小时间控制：(a) 对于一次转移和输入的状态变化；(b) 一步返回原点；(c) 达到初始状态的控制分量

把这些概念推广到两个控制间隔，得

$$x(2) = \Phi^2 x(0) + \Phi b u(0) + b u(1)$$

并且假定

$$x(2) = 0$$

则

$$\begin{aligned} x(0) &= -[\Phi^{-1} b u(0) + \Phi^{-2} b u(1)] \\ &= g_0 u(0) + \Phi^{-1} g_0 u(1) \\ &= g_0 u(0) + g_1 u(1) \end{aligned} \tag{7.2}$$

g_0 和 $g_1(=\Phi^{-1}g_0)$ 的方向确定一个平面（假定它们是独立的，这是通常情况），如果 $x(0)$ 位于这个平面上，那就有可能通过合适地选择 $u(0)$ 和 $u(1)$ 使状态经两个控制间隔之后达到原点. 图 7.1 (c) 对此作了说明，其中 $u(0)$ 应该消除 g_0 分量，$u(1)$ 应该消除 g_1 分量. 以上的一般原理可以容易地加以推广，说明一个 n 维系统能够在 n 个控制间隔内被驱动到原点.

为了更一般地研究问题，考虑一个三维系统. 它可在控制输入序列 $u(0)$，$u(1)$、$u(2)$ 驱动下使之达到原点的初始状态是

$$x(0) = [g_0 u(0) + \Phi^{-1} g_0 u(1) + \Phi^{-2} g_0 u(2)] \tag{7.3}$$

可以把这个关系式写成矩阵形式：

$$\boldsymbol{x}(0) = [\boldsymbol{g}_0 \ \boldsymbol{\Phi}^{-1} \boldsymbol{g}_0 \ \boldsymbol{\Phi}^{-2} \boldsymbol{g}_0] \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \end{bmatrix} \tag{7.4a}$$

$$= [\boldsymbol{g}_0 \ \boldsymbol{g}_1 \ \boldsymbol{g}_2] \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \end{bmatrix} \tag{7.4b}$$

$$= \boldsymbol{G}\boldsymbol{u} \tag{7.4c}$$

如果 $\boldsymbol{G}$ 可逆，则

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \end{bmatrix} = \boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{x}(0) \tag{7.5}$$

从而明确地给出了这个控制序列. $\boldsymbol{G}^{-1}$ 的每一列给出了用来消除 $\boldsymbol{x}$ 的一个状态分量的控制输入. $\boldsymbol{G}$ 的求逆要求 $\boldsymbol{G}$ 是满秩的，意思就是系统必须是能控的.

上述结果用纯离散系统推导出来，然而，如果系统有一个带有采样保持单元的连续前向通道，其一般关系式为

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{\Phi}(T)\boldsymbol{x}(kT) + \boldsymbol{\theta}(T)u(kT)$$

则

$$\boldsymbol{g}_0(T) = -\boldsymbol{\Phi}^{-1}(T)\boldsymbol{\theta}(T) \tag{7.6}$$

前面的结果同样适用.

举一个例子，图 7.2 (a) 的纯离散系统中

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

有

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{g}_0 = -\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{g}_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \tag{7.8}$$

图 7.2 (b) 画出了控制方向 $\boldsymbol{g}_0$, $\boldsymbol{g}_1$, 沿着这些方向的单位距离代表

了当分别以 $u=1,0,\cdots$ 和 $u=0,1,0,\cdots$ 作为输入时可以变成零的状态。对于 $\boldsymbol{g}_1$ 的情况，初始状态被 $\boldsymbol{\Phi}$ 变换到 $\boldsymbol{g}_0$ 方向上，然后 $u(1)$ 把变换后的分量变成零。对于任何 $\boldsymbol{x}(0)$ 所要求的控制输入序列可以通过确定达到 $\boldsymbol{x}(0)$ 所需要的 $\boldsymbol{g}_0$, $\boldsymbol{g}_1$ 分量来获得，正如从特征向量分量中获得固有振型分量那样。为了说明这点，图 7.2(c) 表示出要求达到

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} \tag{7.9}$$

所需要的 $\boldsymbol{g}_0$, $\boldsymbol{g}_1$ 分量，由此求出所需的控制输入序列是

$$u(0)=3/2;\quad u(1)=1/2 \tag{7.10}$$

从式 (7.8) 中的 $\boldsymbol{G}^{-1}$ 可以验证这是正确的。

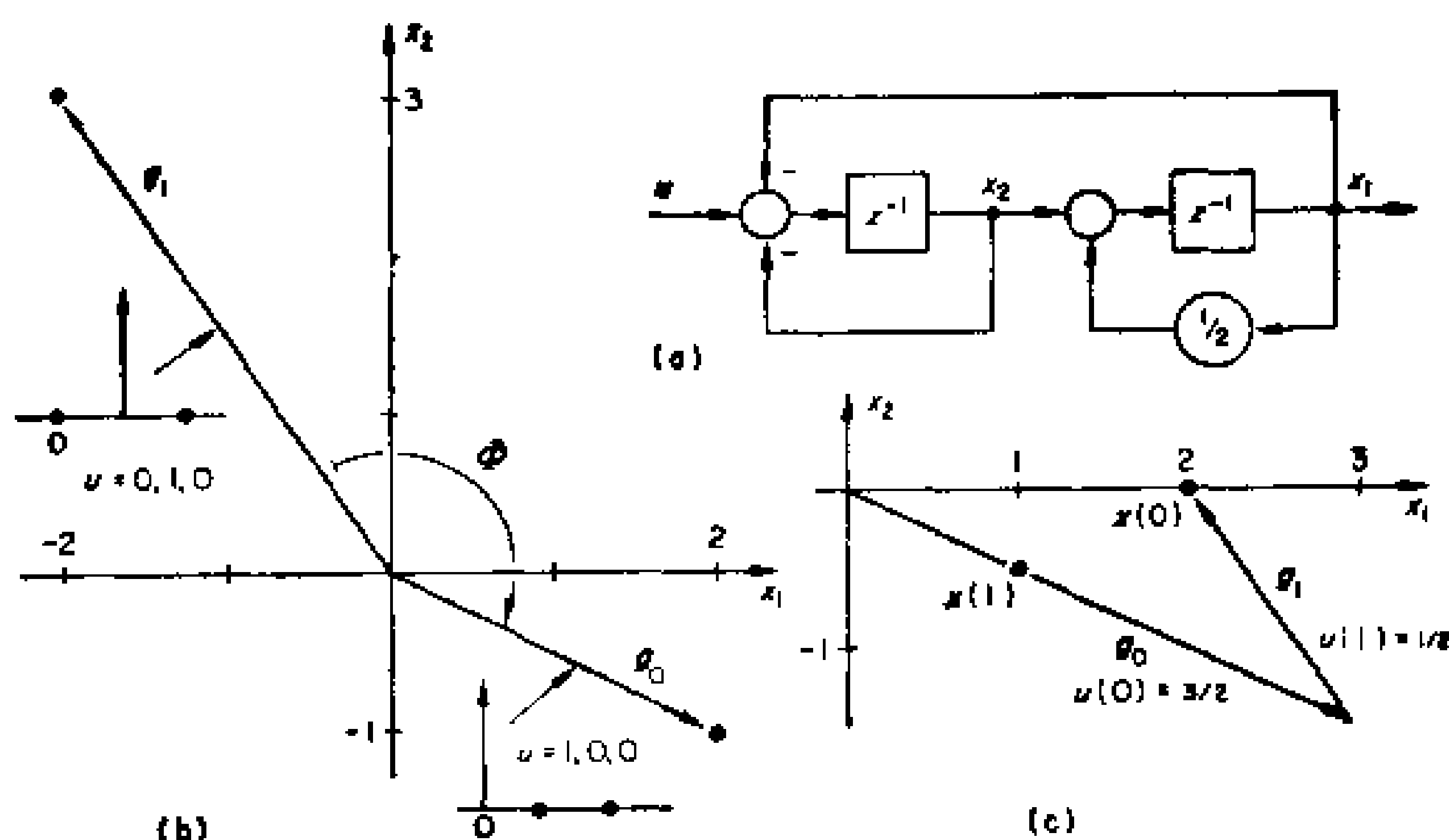


图 7.2 二阶系统：(a) 系统；(b) 控制向量；(c) 达到初始状态的各分量

7.2 具有反馈的控制

从上述例子的结果以及三维系统的方程 (7.5) 可以看出，如果通过 $\boldsymbol{g}_0$, $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$ 分量来达到 $\boldsymbol{x}(0)$，也就是说，如果

$$x(0)=[g_0\ \ g_1\ \ g_2]\begin{bmatrix}u(0)\\u(1)\\u(2)\end{bmatrix}$$

$$=G\begin{bmatrix}u(0)\\u(1)\\u(2)\end{bmatrix}$$

那末控制输入 $u(0)$ 将把 $x(0)$ 的 g_0 分量变成零，并且 g_1, g_2 由 Φ 变换为

$$x(1)=[\Phi g_1\ \ \Phi g_2]\begin{bmatrix}u(1)\\u(2)\end{bmatrix}$$

$$=[g_0\ \ g_1]\begin{bmatrix}u(1)\\u(2)\end{bmatrix}$$

$$=G\begin{bmatrix}u(1)\\u(2)\\0\end{bmatrix} \tag{7.11}$$

控制输入 $u(1)$ 再把 g_0 分量变成零:

$$x(2)=G\begin{bmatrix}u(2)\\0\\0\end{bmatrix} \tag{7.12}$$

且 $u(2)$ 抵消最后的 g_0 分量. 于是，在一般情况下，如果控制输入 $u(k)$ 等于沿 g_0 方向的 $x(k)$ 分量，系统就可以靠反馈而工作. 对于任意 $x(k)$ 控制输入由 G^{-1} 的最高行来确定，因为从刚刚得到的结果，有

$$\begin{bmatrix}u(0)\\u(1)\\u(2)\end{bmatrix}=G^{-1}x(0);\quad \begin{bmatrix}u(1)\\u(2)\\0\end{bmatrix}=G^{-1}x(1);$$

$$\begin{bmatrix}u(2)\\0\\0\end{bmatrix}=G^{-1}x(2) \tag{7.13}$$

倘若

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_0^T \\ \boldsymbol{m}_1^T \\ \boldsymbol{m}_2^T \end{bmatrix} \tag{7.14}$$

则所加状态变量反馈是

$$u(k) = \boldsymbol{k}^T \boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{m}_0^T \boldsymbol{x}(k) \tag{7.15}$$

其中

$$[k_1 \ \ k_2 \ \ k_3] = [m_{01} \ \ m_{02} \ \ m_{03}] \tag{7.16}$$

对于一个纯离散系统,闭环转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_C$ 由下式求出:

$$\boldsymbol{\Phi}_C = [\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{m}_0^T] \tag{7.17a}$$

对于一个具有连续前向通道的系统则由下式求出:

$$\boldsymbol{\Phi}_C(T) = [\boldsymbol{\Phi}(T) + \boldsymbol{\theta}(T)\boldsymbol{m}_0^T] \tag{7.17b}$$

通过反演 $\boldsymbol{G}$ 去求出沿 $\boldsymbol{g}_k$ 方向的 $\boldsymbol{x}(k)$ 分量的一般原理同借助 $\boldsymbol{W}^{-1}$ 来确定状态 $\boldsymbol{x}$ 沿典型系统轴向分量的原理是一样的.

式 (7.7) 所表示的系统具有

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

根据式 (7.8) 的 $\boldsymbol{G}^{-1}$ 求出

$$\boldsymbol{m}_0^T = [3/4 \ \ 1/2] \tag{7.18}$$

这样,从式 (7.17a) 得

$$\boldsymbol{\Phi}_C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [3/4 \ \ 1/2]$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -1/4 & -1/2 \end{bmatrix} \tag{7.19}$$

并且可以验证

$$\boldsymbol{\Phi}_C^2 = [\boldsymbol{0}] \tag{7.20}$$

因此,任何 $\boldsymbol{x}(0)$ 经两次转移之后都变成零. 事实上,一个 n 维最小时间控制系统的一般特性是

$$\boldsymbol{\Phi}_C^n = [\boldsymbol{0}] \tag{7.21}$$

在这情况下,$\boldsymbol{\Phi}_C$ 是幂零矩阵.

7.3 典型系统

具有矩阵$\boldsymbol{F}$的任何连续系统或离散系统，都可以用式(2.142)求出它的对应于互相耦合的重复特征值λ_1的(广义)特征向量，即

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{w}_1$$
$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_2 = \lambda_1 \boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{w}_1$$
$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_3 = \lambda_1 \boldsymbol{w}_3 + \boldsymbol{w}_2$$
$$\vdots$$

如果$\lambda_1 = 0$，也就是说，如果λ_1是一个等于零的重复特征值，则上式写为

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_1$$
$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{w}_2 \tag{7.22}$$
$$\vdots$$

假定系统$\boldsymbol{F}$是三维的，则任何初始状态可表示为

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{W}\boldsymbol{d}(0) = [\boldsymbol{w}_1\ \ \boldsymbol{w}_2\ \ \boldsymbol{w}_3]\boldsymbol{d}(0)$$

如果系统是离散的，则

$$\boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(0) = [\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_1\ \ \boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_2\ \ \boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_3]\boldsymbol{d}(0)$$
$$= [\boldsymbol{0}\ \ \boldsymbol{w}_1\ \ \boldsymbol{w}_2]\boldsymbol{d}(0) \tag{7.23a}$$

以及

$$\boldsymbol{x}(2) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(1) = [\boldsymbol{0}\ \ \boldsymbol{0}\ \ \boldsymbol{w}_1]\boldsymbol{d}(0) \tag{7.23b}$$

$$\boldsymbol{x}(3) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(2) = [\boldsymbol{0}\ \ \boldsymbol{0}\ \ \boldsymbol{0}]\boldsymbol{d}(0) \tag{7.23c}$$

式(7.23)所表现的结果恰好是从最小时间控制系统推导出来的特性。这可以说明如下：当

$$\boldsymbol{\Phi}_C = [\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{m}_0^T]$$

且

$$\boldsymbol{g}_0 = -\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{b};\ \ \boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{g}_0;\ \ \boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{g}_1$$

又当

$$\begin{bmatrix} m_0^T \\ m_1^T \\ m_2^T \end{bmatrix}[g_0\ \ g_1\ \ g_2] = G^{-1}G = I$$

时，就得到如下结果(比较式(7.22))：

$$\Phi_C g_0 = [\Phi + bm_0^T]g_0 = [-b + b] = 0 \tag{7.24a}$$

$$\Phi_C g_1 = [\Phi + bm_0^T]g_1 = g_0 \tag{7.24b}$$

$$\Phi_C g_2 = g_1 \tag{7.24c}$$

这表明最小时间控制系统的特点，是它具有重复的零特征值作为唯一的特征值，并且，这些 g 向量可以认为是系统的一组(广义)特征向量.

这些结论可以由典型系统来证实，其关系式是

$$\Lambda = G^{-1}\Phi_C G \tag{7.25}$$

或者

$$\Lambda = \begin{bmatrix} m_0^T \\ m_1^T \\ m_2^T \end{bmatrix}\Phi_C\ [g_0\ \ g_1\ \ g_2] \tag{7.26}$$

利用式(7.24)得

$$\Lambda = \begin{bmatrix} m_0^T \\ m_1^T \\ m_2^T \end{bmatrix}[0\ \ g_0\ \ g_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.27}$$

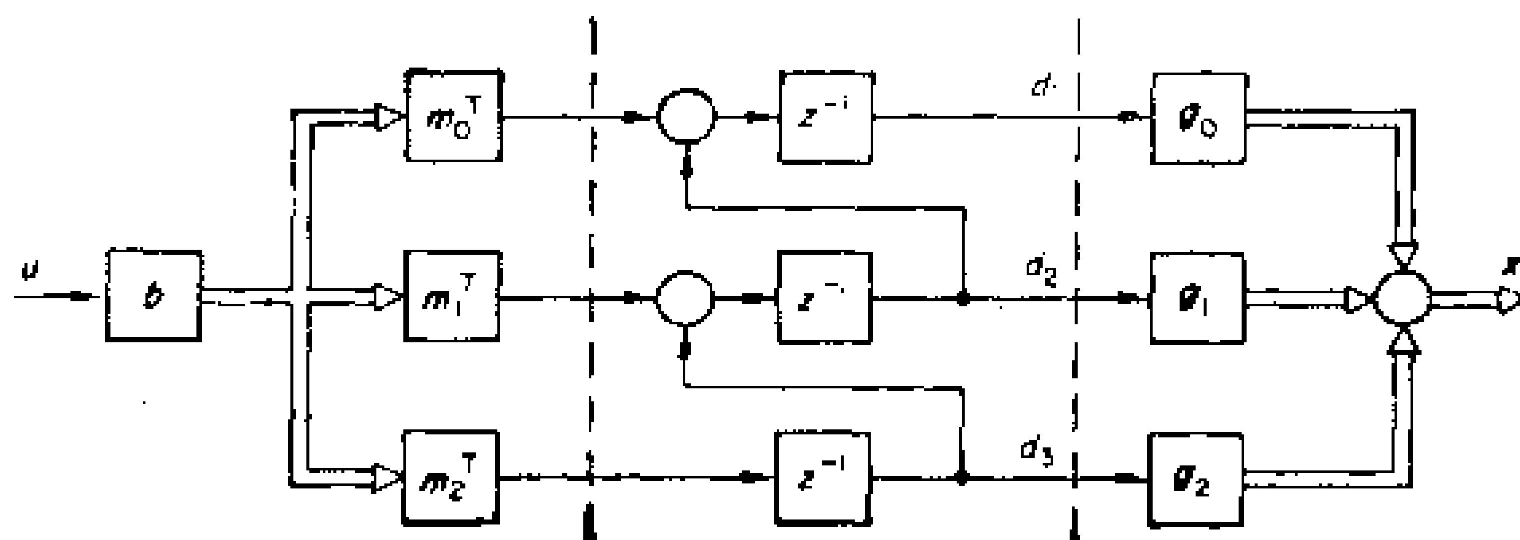


图 7.3　典型系统

这是表示三个延迟环节串联的 Λ 应有的形式．　整个系统结构形

式如图 7.3 所示，由典型系统的形式可显现出整个系统的特性. 在典型系统中任何初始条件 $\boldsymbol{x}(0)$ 表示为

$$\begin{bmatrix} d_1(0) \\ d_2(0) \\ d_3(0) \end{bmatrix} = \boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{x}(0) \tag{7.28}$$

并且，由于典型系统没有反馈通道，初始值仅能向前移动，所以得到的状态序列为

$$\boldsymbol{d}(0) = \begin{bmatrix} d_1(0) \\ d_2(0) \\ d_3(0) \end{bmatrix};\ \boldsymbol{d}(1) = \begin{bmatrix} d_2(0) \\ d_3(0) \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{d}(2) = \begin{bmatrix} d_3(0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{d}(3)\ \boldsymbol{d}(4),\ \cdots = \boldsymbol{0} \tag{7.29}$$

$\boldsymbol{d}$ 的状态序列通过特征向量转换成 $\boldsymbol{x}$，得

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{g}_0 d_1(0) + \boldsymbol{g}_1 d_2(0) + \boldsymbol{g}_2 d_3(0) \tag{7.30a}$$

$$\boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{g}_0 d_2(0) + \boldsymbol{g}_1 d_3(0) \tag{7.30b}$$

$$\boldsymbol{x}(3) = \boldsymbol{g}_0 d_3(0) \tag{7.30c}$$

在每次转移中，沿某个 $\boldsymbol{g}$ 向量的一个分量消失了. 如果系统有一个连续的前向通道，在 $\boldsymbol{x}(0)$, $\boldsymbol{x}(1)$, $\cdots$ 之间将会出现 $\boldsymbol{x}$ 的连续的轨迹，尽管在这些点上轨迹方向可能发生突变.

考察图 7.3 就可以估计出系统的各种一般性质. 由式 (7.28)，一个一般的初始状态可使典型系统全部变量有初始值，但是，经过一次转移之后就仅有两个变量有数值，而最后则只有一个了. 这样，对于任何 $\boldsymbol{x}(0)$, $\boldsymbol{x}(1)$ 都落在 $\boldsymbol{g}_0$, $\boldsymbol{g}_1$ 所确定的平面上，而 $\boldsymbol{x}(2)$ 则落在 $\boldsymbol{g}_0$ 线上，一般轨迹如图 7.4 所示那样. 既然状态的维数在每次转移后减少一，这就表明 $\boldsymbol{\Phi}_C^k$ 的秩随着 k 的每次增加而减少一，这只要把式 (7.25) 重新排列后展开成

$$\boldsymbol{\Phi}_C = \boldsymbol{G}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{G}^{-1};\ \boldsymbol{\Phi}_C^2 = \boldsymbol{G}\boldsymbol{\Lambda}^2\boldsymbol{G}^{-1};\cdots$$

然后仔细分析一下就不难检验出来. 再者，如果施加一个常量 u 输入（阶跃），经三次转移之后 $\boldsymbol{d}$（和 $\boldsymbol{x}$）将达到稳定状态. 同样，

在一个斜坡输入下的稳态斜坡响应(即使具有一定的误差)也将经历三次转移之后建立起来.

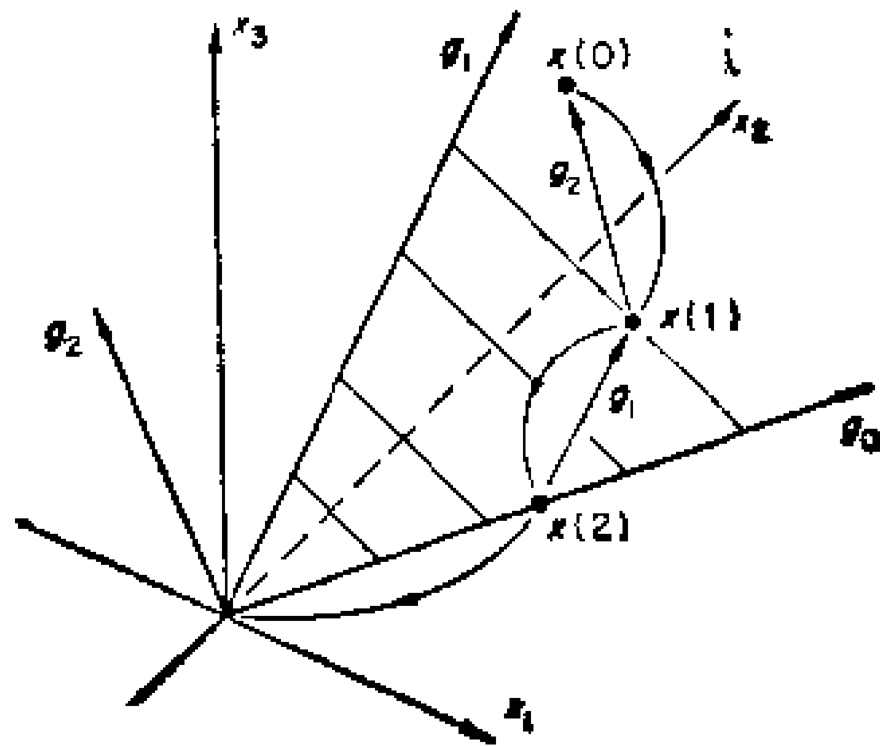


图 7.4 一般轨迹

一个特殊情况是系统具有一个同伴形的矩阵(当 $n=3$ 时):

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33}\end{bmatrix};\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \tag{7.31}$$

如果有反馈

$$\boldsymbol{k}^T=-[\phi_{31}\ \ \phi_{32}\ \ \phi_{33}] \tag{7.32}$$

则

$$\boldsymbol{\Phi}_C=[\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{7.33}$$

由 $\boldsymbol{k}^T$ 引入的反馈抵消了由于 $\boldsymbol{\Phi}$ 最低一行构成的系统的反馈，并且系统立即变成由延迟环节串接成的典型形式. $\boldsymbol{x}(0)$ 的初始分量在相继的转移中向前传递,而在每次转移中消失一个分量.

7.4 z 变换和根轨迹法的应用

一个最小时间控制系统响应的 z 变换是

$$\boldsymbol{x}(z) = [\boldsymbol{I}z - \boldsymbol{\Phi}_C]^{-1} z \boldsymbol{x}(0) \tag{7.34}$$

将它展开成一般级数得

$$\boldsymbol{x}(z) = [\boldsymbol{I} + z^{-1}\boldsymbol{\Phi}_C + z^{-2}\boldsymbol{\Phi}_C^2 + \cdots + z^{-k}\boldsymbol{\Phi}_C^k + \cdots]\boldsymbol{x}(0) \tag{7.35}$$

因为 $\boldsymbol{\Phi}_C^n = [\boldsymbol{0}]$，这个级数将终止于第 n 项，得

$$\boldsymbol{x}(z) = [\boldsymbol{I} + z^{-1}\boldsymbol{\Phi}_C + \cdots + z^{-(n-1)}\boldsymbol{\Phi}_C^{n-1}]\boldsymbol{x}(0) \tag{7.36}$$

由反变换得到 $\boldsymbol{x}$ 值的 n 个有限序列为

$$\boldsymbol{x}(0),\ \boldsymbol{x}(1),\ \cdots,\ \boldsymbol{x}(n-1)$$

在式(7.36)中级数取有限项，这也是应该料到的，因为既然 $\boldsymbol{\Phi}_C$ 仅有一个重复的零特征值，那么式(7.34)的特征方程就仅有一个在原点上的多阶极点.

就 z 平面分析法和根轨迹法来说，最小时间控制系统的设计需要引入适当的反馈，使其全部极点位于原点上. 这意味着，根轨迹图上的原点必须有一个合适阶数的鞍点，而设计的问题就是如何获得这样的鞍点. 使用如式(7.15)那样的状态变量反馈可以实现这种设计，然而在根轨迹图上可以把它解释为引入附加零点的设计，这是在4.1节使用的方法. 把状态变量反馈使用到式(7.7)所表示的系统中去，它有特征值 $(-1 \pm j\sqrt{7})/4$.

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

便得到如图7.5a所示的系统结构，其中从 x_2 处的反馈已变换到 x_1 处，而且由

$$H_b(z) = \left\{m_{01} + m_{02}\left(z - \frac{1}{2}\right)\right\} \tag{7.37}$$

给出一个零点，通过调整 m_{01} 和 m_{02} 可使这个零点位于实轴的任意位置上. 如果没有 $H_b(z)$，则前向通道在0°轨迹线上有一个鞍点位于 $z = -\dfrac{1}{4}$ 处，所加的零点必须把鞍点移到原点去(见图7.5(b)). 这就确保了两个闭环极点能够落在原点上. 整个开环传递函数为

$$T(z) = \frac{H_b(z)}{(z^2 + 0.5z + 0.5)} \tag{7.38}$$

鞍点落在原点上的条件为

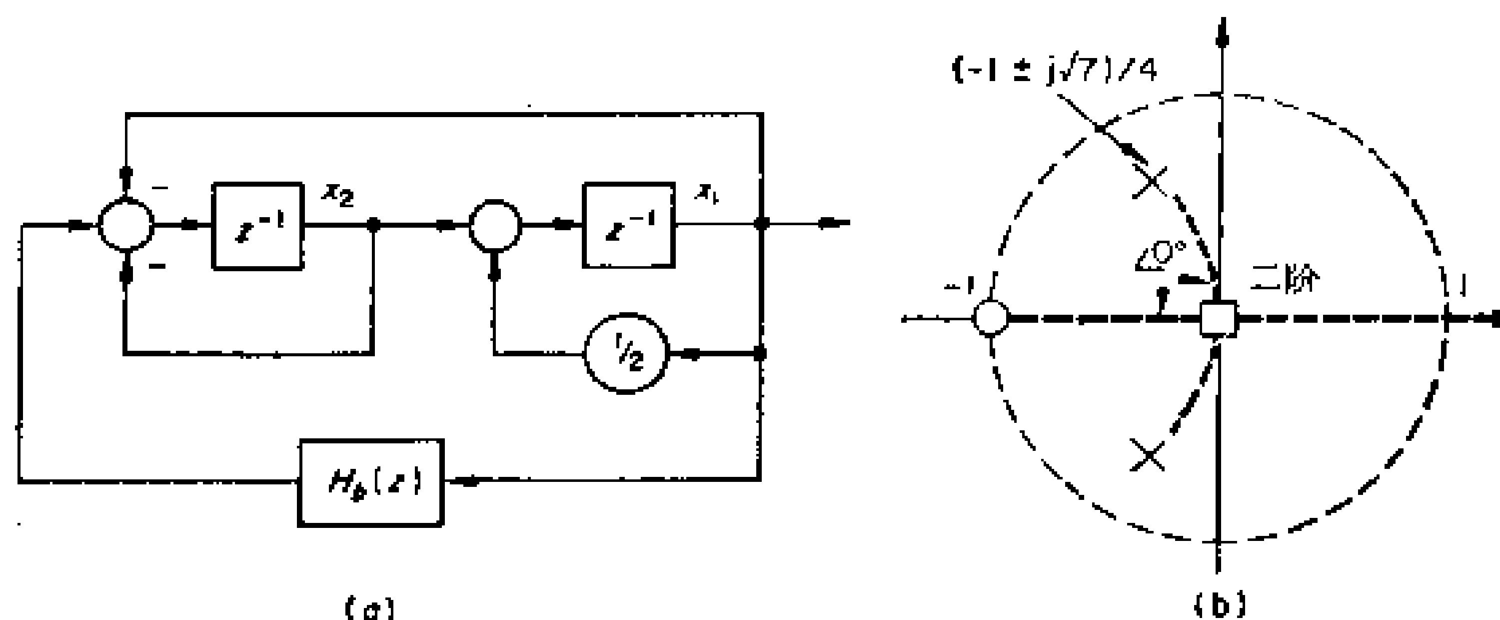


图 7.5　z 域解释：(a) 具有状态变量反馈 $H_b(z)$ 的系统结构；(b) 由 $H_b(z)$ 得到零点后的根轨迹

$$\left.\frac{dT(z)}{dz}\right|_{z=0} = 0 \tag{7.39}$$

因为图 7.5 (b) 假定为正反馈，所以两个极点都位于原点的条件为

$$T(0) = 1 \tag{7.40}$$

如果按照式 (7.38) 来计算式 (7.39) 和 (7.40) 的话，则鞍点条件是

$$m_{02} + 2m_{01} = 2 \tag{7.41a}$$

因为 $T(0) = 1$，有

$$2m_{01} - m_{02} = 1 \tag{7.41b}$$

由此可得

$$m_{01} = 3/4;\ m_{02} = 1/2$$

这就像式 (7.18) 所表示的那样．结果，零点位于 −1，使 0° 轨迹的鞍点位于原点上．

7.5　三重积分器的控制和无阻尼振荡系统的控制

三重积分器和无阻尼振荡器的最小时间控制是上述方法在具

有连续前向通道系统这方面应用的两个例子.

三 重 积 分 器

图 7.6 (a) 是系统的结构，它的前向通道有一个采样保持单元 (S. H.)，而 $\boldsymbol{k}^T$ 是为了实现最小时间控制而待确定的一个环节. 系统的连续部分可以用状态变量时域关系式:

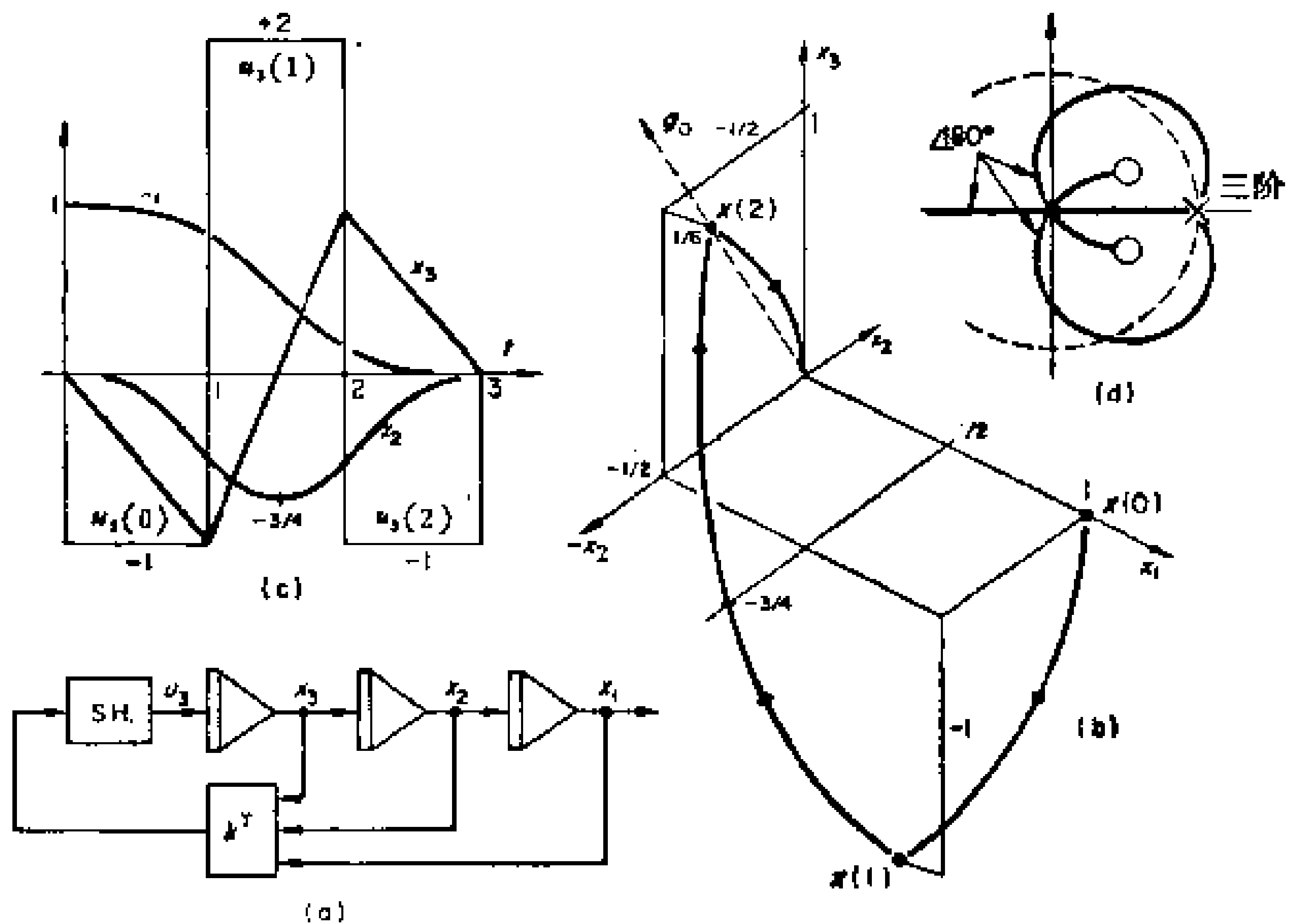


图 7.6 三重积分器控制: (a) 系统; (b) 轨迹; (c) 控制输入 u_3; (d) 具有二阶鞍点的根轨迹

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

来描述. 对于 $\boldsymbol{k}^T=\boldsymbol{0}^T$，分析初始条件对系统的影响，可以直接写出连续转移矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}1 & t & t^2/2\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{7.42}$$

若在 u_3 施加一个阶跃函数，则

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3/6 \\ t^2/2 \\ t \end{bmatrix} \tag{7.43}$$

当采样间隔 $T = 1$ 时，系统的离散转移矩阵和控制向量将分别为

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\Phi}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7.44}$$

得到

$$\boldsymbol{g}_0 = -\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} -1/6 \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{7.45}$$

根据式 (7.45) 可以求出式 (7.4) 中 $\boldsymbol{G}$ 矩阵的各列元素，这样便得到

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} -1/6 & -7/6 & -19/6 \\ 1/2 & 3/2 & 5/2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{G}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -11/6 \\ 2 & 3 & 7/6 \\ -1 & -1 & -1/3 \end{bmatrix} \tag{7.46}$$

$\boldsymbol{G}^{-1}$ 的顶行是 $\boldsymbol{k}^T$，即

$$\boldsymbol{k}^T = [-1 \ \ -2 \ \ -11/6]$$

从而得

$$\boldsymbol{\Phi}_C = [\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{k}^T] = \begin{bmatrix} 5/6 & 2/3 & 7/36 \\ -1/2 & 0 & 1/12 \\ -1 & -2 & -5/6 \end{bmatrix} \tag{7.47}$$

把 $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{G}^{-1}$ 作为一组(广义)特征向量 (见习题 7.5)，初始状态

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.48}$$

可由 $\boldsymbol{G}$ 的各个分量给出，其系数由 $\boldsymbol{G}^{-1}$ 的第一列决定

$$\boldsymbol{x}(0) = -\boldsymbol{g}_0 + 2\boldsymbol{g}_1 - \boldsymbol{g}_2 \tag{7.49}$$

状态 $\boldsymbol{x}(1)$ 和 $\boldsymbol{x}(2)$ 为

$$\boldsymbol{x}(1) = 2\boldsymbol{g}_0 - \boldsymbol{g}_1 = \begin{bmatrix} 5/6 \\ -1/2 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{x}(2) = -\boldsymbol{g}_0 = \begin{bmatrix} 1/6 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7.50}$$

而且它们之间以连续的轨迹连接起来，图 7.6 (b) 表示了轨迹的一般形式，其中 $\boldsymbol{x}(2)$ 叠合于 $\boldsymbol{g}_0$. 据式 (7.5)，因 x_1 是式 (7.48) 的唯一的非零初始状态，故控制输入 u_3 的序列可以从 $\boldsymbol{G}^{-1}$ 的第一列求得

$$\begin{aligned} u_3(0) &= -1 \\ u_3(1) &= 2 \\ u_3(2) &= -1 \end{aligned} \tag{7.51}$$

这一序列及对应的状态变化如图 7.6 (c) 所示. 控制输入的结果是，序列的积分使 x_3 和 x_2 都到零，而使 $x_1 = -1$，它用来对消初始条件.

为了研究最小时间控制系统在原点上有一个鞍点这样的根轨迹图的要求，假定反馈通道在 $\boldsymbol{k}^T$ 之后被断开. 回路传递函数为

$$T(z) = \boldsymbol{k}^T[\boldsymbol{I}z - \boldsymbol{\Phi}]^{-1}\boldsymbol{\theta} \tag{7.52}$$

可以把它计算出来(忽略 $\boldsymbol{k}^T$ 的负符号)

$$T(z) = \frac{(3z^2 - 3z + 1)}{(z-1)^3} \tag{7.53}$$

得到复数零点 $z = (1 \pm j1/\sqrt{3})/2$. 可以看出它满足

$$T(0) = 1 \tag{7.54}$$

并且，原点上的二阶鞍点的微分条件也满足

$$T'(0) = 0; \quad T''(0) = 0 \tag{7.55}$$

180° 线的一般形状如图 7.6 (d) 所示，而且从式 (7.54) 知道，单位回路增益将在原点上给出一个三阶闭环极点. 因为 180° 线在单位圆外边通过，所以减少增益时系统有可能不稳定. 系统的这个特性用状态空间分析法不能直接地显示出来. 另外，全部极点位

于鞍点上，而且鞍点上的传递函数的导数等于零．这一事实表明，最终得到的系统对参数的微小变化是敏感的．

振　荡　系　统

系统的一般结构形式如图 7.7 (a) 所示． 如果 u_2 为零，则对于任何初始条件 $\boldsymbol{x}(0)$ 的响应是一个不衰减的振荡，频率为 ω_n. 在 $\boldsymbol{x}$ 平面上，相应的轨迹是圆心位于原点的圆弧，并且通过 $\boldsymbol{x}(0)$ (见图 7.7 (b) 的线 (1))． 从轨迹可以推断，连续转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\cos\omega_n t & \sin\omega_n t\\ -\sin\omega_n t & \cos\omega_n t\end{bmatrix} \tag{7.56}$$

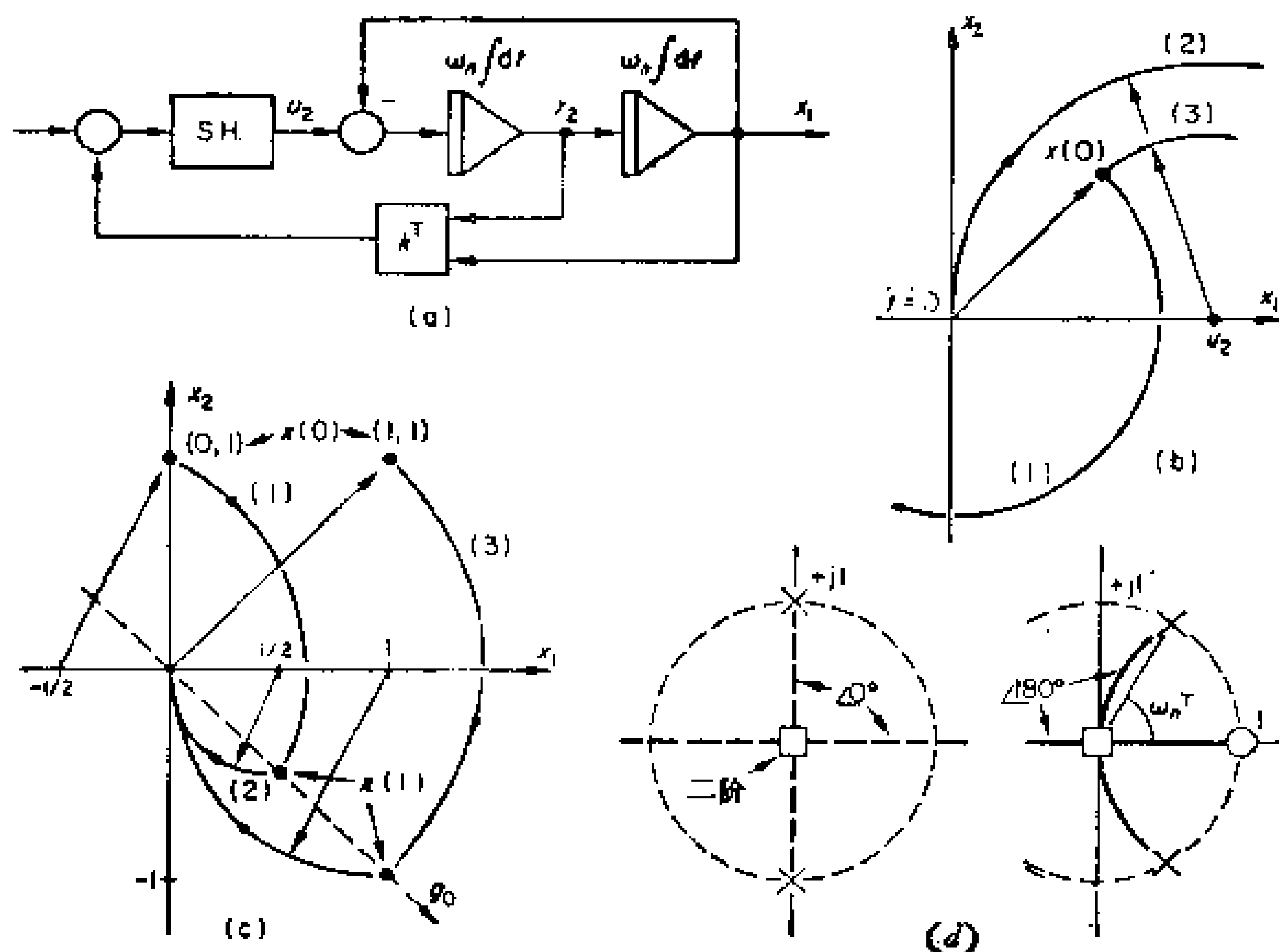


图 7.7　振荡器的控制：(a) 系统；(b) 一般轨迹；(c) 最小时间控制轨迹；(d) 根轨迹图

而对于间隔时间为 T 的离散转移矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(T)=\begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ -\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{\Phi}^{-1}(T)=\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix} \tag{7.57}$$

其中，$\phi=\omega_n T$.

如果在 $0<t<T$ 内从采样保持单元来的输入为常量 u_2，则

$$\theta(T)u_2=\int_0^T \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u_2 d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}1-\cos\phi\\ \sin\phi\end{bmatrix}u_2 \tag{7.58}$$

相应的轨迹是一个圆心在 u_2 的圆，它在 $t=0$ 时起始于原点(见图 7.7 (b) 线 (2)). 在 u_2 输入和某一个初始条件同时作用下，其轨迹将是中心处于 u_2 的一个圆，而且通过 $\boldsymbol{x}(0)$ (见图 7.7 (b) 线 (3)).

施加最小时间控制时有

$$\boldsymbol{g}_0=-\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{\theta}=\begin{bmatrix}1-\cos\phi\\ -\sin\phi\end{bmatrix} \tag{7.59}$$

$$\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{g}_0=\begin{bmatrix}1+\cos\phi(1-2\cos\phi)\\ \sin\phi(1-2\cos\phi)\end{bmatrix} \tag{7.60}$$

从而得

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1-\cos\phi & (1-\cos\phi)(1+2\cos\phi)\\ -\sin\phi & \sin\phi(1-2\cos\phi)\end{bmatrix} \tag{7.61a}$$

和

$$\boldsymbol{G}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{1-2\cos\phi}{2(1-\cos\phi)} & \dfrac{1+2\cos\phi}{2\sin\phi}\\ \dfrac{1}{2(1-\cos\phi)} & \dfrac{1}{2\sin\phi}\end{bmatrix} \tag{7.61b}$$

$\boldsymbol{G}^{-1}$ 的最高行给出了所要求的反馈，并且可以求得 $\boldsymbol{\Phi}_C$ 为

$$\boldsymbol{\Phi}_C=[\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{k}^T]=\begin{bmatrix}1/2 & \dfrac{1-\cos\phi}{2\sin\phi}\\ \dfrac{-\sin\phi}{2(1-\cos\phi)} & -1/2\end{bmatrix} \tag{7.62}$$

在工作中，控制间隔期间内的轨迹将是一段圆弧，它的角度为 $\omega_n T(=\phi)$，圆心在控制输入 u_2 并起始于系统的初始状态. 通过 $\boldsymbol{k}^T$ 引入的反馈将调整这段圆弧的圆心，使经过两段角度为 $\omega_n T$ 的

圆弧后达到原点，并且 $x(1)$ 总是在 g_0 线上．举个例子，令 $\omega_n T = \pi/2$，全部轨迹均为 90° 的圆弧．利用刚才推导的一般结果，得

$$\boldsymbol{\Phi}_c = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{k}^T = \begin{bmatrix} 1/2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{g}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7.63}$$

倘若初始状态是

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{x}(1) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \tag{7.64}$$

以及

$$u_2(0) = \boldsymbol{k}^T\boldsymbol{x}(0) = -1/2 \tag{7.65}$$

其轨迹是一段圆心在 $x_1 = -1/2$ 的 90° 圆弧（见图 7.7 (c) 线 (1)）．第二个控制输入是

$$u_2(1) = 1/2 \tag{7.66}$$

其轨迹是一段从 $\boldsymbol{x}(1)$ 到原点的 90° 圆弧（见图 7.7 (c) 线 (2)）．如果初始状态是

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{x}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{7.67}$$

和

$$u_2(0) = 0 \tag{7.68}$$

其轨迹的第一段是不加输入的 90° 圆弧（见图 7.7 (c) 线 (3)）．第二段 90° 轨迹中心在 $+1$，并达到原点．倘若

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

则

$$x(1)=\begin{bmatrix}1/2\\-1/2\end{bmatrix} \tag{7.69}$$

其结果与式(7.64)相同，于是 $x(1)$ 不存在唯一的前态．这是可以预料到的，因为 Φ_C 不是满秩的．

讨论在 k^T 环节之后断开回路这种情况下的传递函数，就可推导出鞍点的条件．式(7.52)给出

$$T(z)=[1/2\ -1/2]\ \frac{1}{(z^2+1)}\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \tag{7.70}$$

$$=\frac{1}{z^2+1}$$

并且有极点 $z=\pm j1$，如图7.7(d)所示．闭环极点将出现在 $0°$ 线上，它在原点上有一个鞍点，由于 $T(0)=1$，原点上的极点将是二阶的．如果 $\omega_nT\neq\pi/2$，则系统的极点就落在单位圆上角度为 $\pm\omega_nT$ 的地方，如图7.7(d)所示．在这种情况下，k^T 必须产生一个零点，以便在原点上给出一个鞍点．若 $\omega_nT=60°$，那就像图示那样，这个零点必须是 $z=1$，而且用的是负反馈．

7.6 无波动系统

一个最小时间响应系统的特点，是它具有重复的零特征值或在 z 平面原点上有多重极点．重要的是，设计过程中极点不应该被零点所对消，因为按照零点极点顺序的先后，对消的结果将使相应的振型变成为不能观测的或不能控的．而对于一个具有连续部分的系统来说，不能观测的振型可能会产生一个在采样瞬间通过零值的连续响应或波动过程．

假定有图7.8那样的系统，它具有二类特性，要求用一个离散时间补偿器 $D(z)$ 使之获得最小时间响应．如果采样间隔 T 是一个单位时间，则

$$\Phi=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix};\ \theta=\begin{bmatrix}1/2\\1\end{bmatrix} \tag{7.71}$$

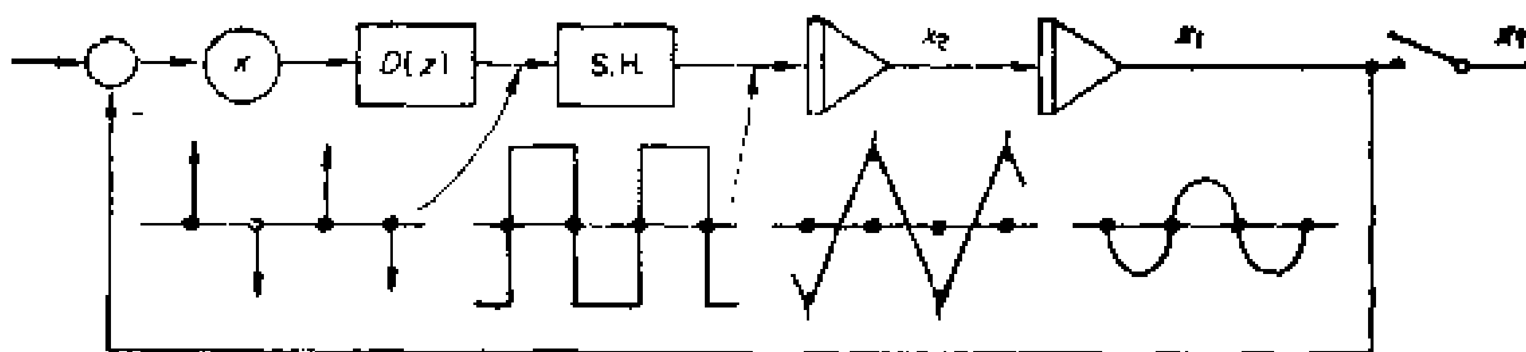


图 7.8 具有离散时间补偿器和 x_1 处有不能观测振型的系统

和

$$[ZI-\Phi]^{-1}\theta=\frac{1}{(z-1)^2}\begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.72)$$

从而得到前向通道传递函数为

$$F(z)=\frac{z+1}{2(z-1)^2} \quad (7.73)$$

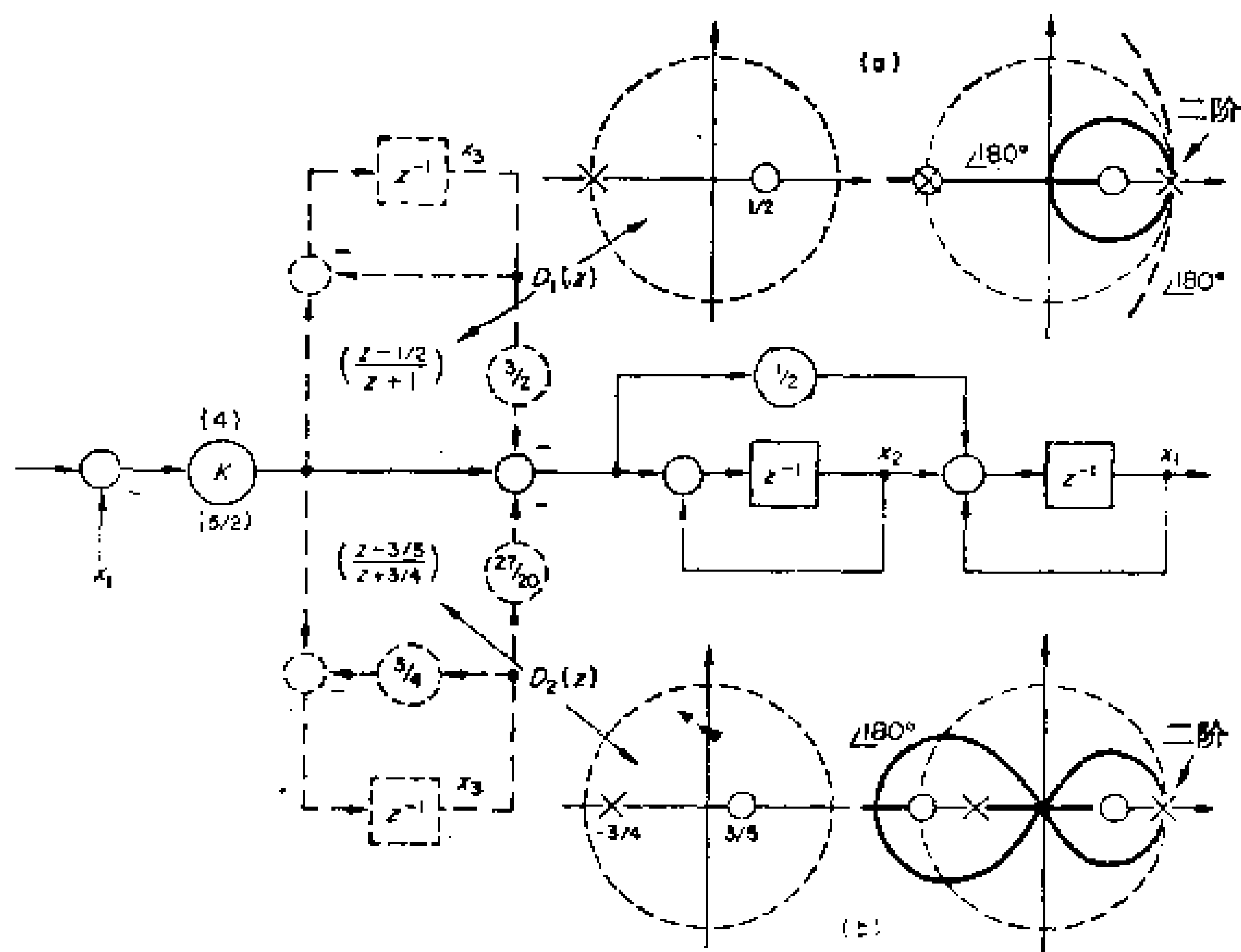


图 7.9 图 7.8 的离散形式：(a) 具有 $D_1(z)$ 和零极点对消时的前向通道根轨迹；(b) 具有 $D_2(z)$ 和无对消作用时的前向通道根轨迹

零极点图的 180° 线如图 7.9 (a) 虚线所示，并且系统在任何回路增益情况下都是不稳定的．如果使用补偿器去对消位于 -1 位置上的零点，同时在 $\frac{1}{2}$ 处产生一个零点，即要求

$$D_1(z) = \frac{z - 1/2}{z + 1} \tag{7.74}$$

如图 7.9 (a) 所示那样，则 180° 线将在原点处有一个鞍点，图中上方的补偿器是实现式 (7.74) 的一个可能的方案．补偿后的前向通道在无反馈情况下将有

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3/4 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} K; \quad \boldsymbol{c}^T = [100] \tag{7.75}$$

并可验证，前向通道如所料的那样是不能观测的，这意味着不能用反馈来改变不能观测的振型．具有补偿作用和回路增益为 K 的前向通道传递函数为

$$KD_1(z)F(z) = \frac{K(z - 1/2)}{2(z - 1)^2} \tag{7.76}$$

若希望把它的两个极点置于原点上，则要求 $K = 4$．对于闭环系统

$$\boldsymbol{\Phi}_{C_1} = [\boldsymbol{\Phi} - K\boldsymbol{b}[1\ 0\ 0]] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3/4 \\ -4 & 1 & -3/2 \\ -4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{7.77}$$

它的特征方程为

$$z^2(z + 1) = 0 \tag{7.78}$$

特征值 -1 是能控但不能观测的，写出式 (7.77) 的 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵即可验证这一点．不能观测的振型是在补偿器里产生的，它对应于一系列交变脉冲，并在采样保持器输出处产生一系列方波，如图 7.8 所示．这个波形被积分两次，在 x_1 处的波形刚好在采样瞬间通过零值，使系统在准确值附近波动．如果施加单位阶跃输入，$\boldsymbol{x}$ 的序列便可根据

$$\boldsymbol{x}(k + 1) = \boldsymbol{\Phi}_{C_1}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{b}u(k); \quad u(k) = 1, 1, 1, \cdots \tag{7.79a}$$

而求得，如

$$\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{x}(1), \cdots = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 4 & -6 & 6 & -6 & \cdots \\ 0 & 4 & -8 & 8 & -8 & \end{bmatrix} \tag{7.79b}$$

当 $k \geqslant 2$ 时将获得 $x_1(k)$ 的准确单位值. x_2 有一串 ± 6 的三角波形，经积分在 x_1 处得到具有 $\pm 3/2$ 波峰的波动，在离散系统分析中，在 x_1 处并不显示出这一点来. 用习题 5.11 可验证这个结果.

以上的结果说明，应当避免对消作用，而正确的补偿程序是使得没有开环零点被对消，并（在闭环系统中）把全部开环极点移到原点处. 一个通常的补偿器为

$$D(z) = \frac{z + z_a}{z + z_1} \tag{7.80}$$

为了避免零极点对消，并使之在原点上得到一个二阶鞍点（如图 7.9 (b)），所需要的 z_a 和 z_1 的值可以从式 (4.37) 至式 (4.39) 表明的传递函数特性推导出来，其中二阶鞍点要求对分子与分母的 S^0, S^1 和 S^2 项进行系数匹配. 就本例来说，前向通道 $KD(z)F(z)$ 中要求有一个二阶鞍点，其中

$$KD(z)F(z) = \frac{K(z + z_a)(z + 1)}{2(z + z_1)(z - 1)^2} \tag{7.81a}$$

$$= \frac{K(z^2 + z(z_a + 1) + z_a)}{2(z^3 + z^2(z_1 - 2) + z(1 - 2z_1) + z_1)} \tag{7.81b}$$

分子与分母系数比值相同即可满足匹配条件，因为分子的各项可由 K 调整其值. 比值相同的条件为

$$\frac{1}{z_1 - 2} = \frac{z_a + 1}{1 - 2z_1} = \frac{z_a}{z_1} \tag{7.82a}$$

从而可以得到

$$z_a = -3/5; \quad z_1 = 3/4 \tag{7.82b}$$

求得如图 7.9 下方所示的补偿器 $D_2(z)$. 如果

$$KD(0)F(0) = -1$$

则全部闭环极点可以落在原点上，从式 (7.81) 和 (7.82) 可知，此时要求 $K = 5/2$. 前向通道有

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -27/40\\ 0 & 1 & -27/20\\ 0 & 0 & -3/4\end{bmatrix} \tag{7.83}$$

且现在是能观测的．从方块图可得闭环转移矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}_{C_1}=\begin{bmatrix}-1/4 & 1 & -27/40\\ -5/2 & 1 & -27/20\\ -5/2 & 0 & -3/4\end{bmatrix};\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}5/4\\ 5/2\\ 5/2\end{bmatrix} \tag{7.84}$$

它的特征方程为

$$z^3=0$$

从式 (7.79 (a)) 以及 $\boldsymbol{\Phi}_{C_1}$ (见习题 7.6) 求出阶跃响应为

$$\boldsymbol{x}(0),\ \boldsymbol{x}(1),\ \cdots=\begin{bmatrix}0 & 5/4 & 7/4 & 1 & \\ 0 & 5/2 & -3/2 & 0 & \cdots\\ 0 & 5/2 & -5/2 & 0 & \end{bmatrix} \tag{7.85}$$

式中，x_2 是没有波动的．$x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的波形如图 7.10 (a) 所示，且 $x_2(t)$ 的积分得到最终的 x_1 的单位值．斜坡响应可以从

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{\Phi}_{C_1}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{b}u(k);\ u(k)=0,1,2,\cdots$$

求得

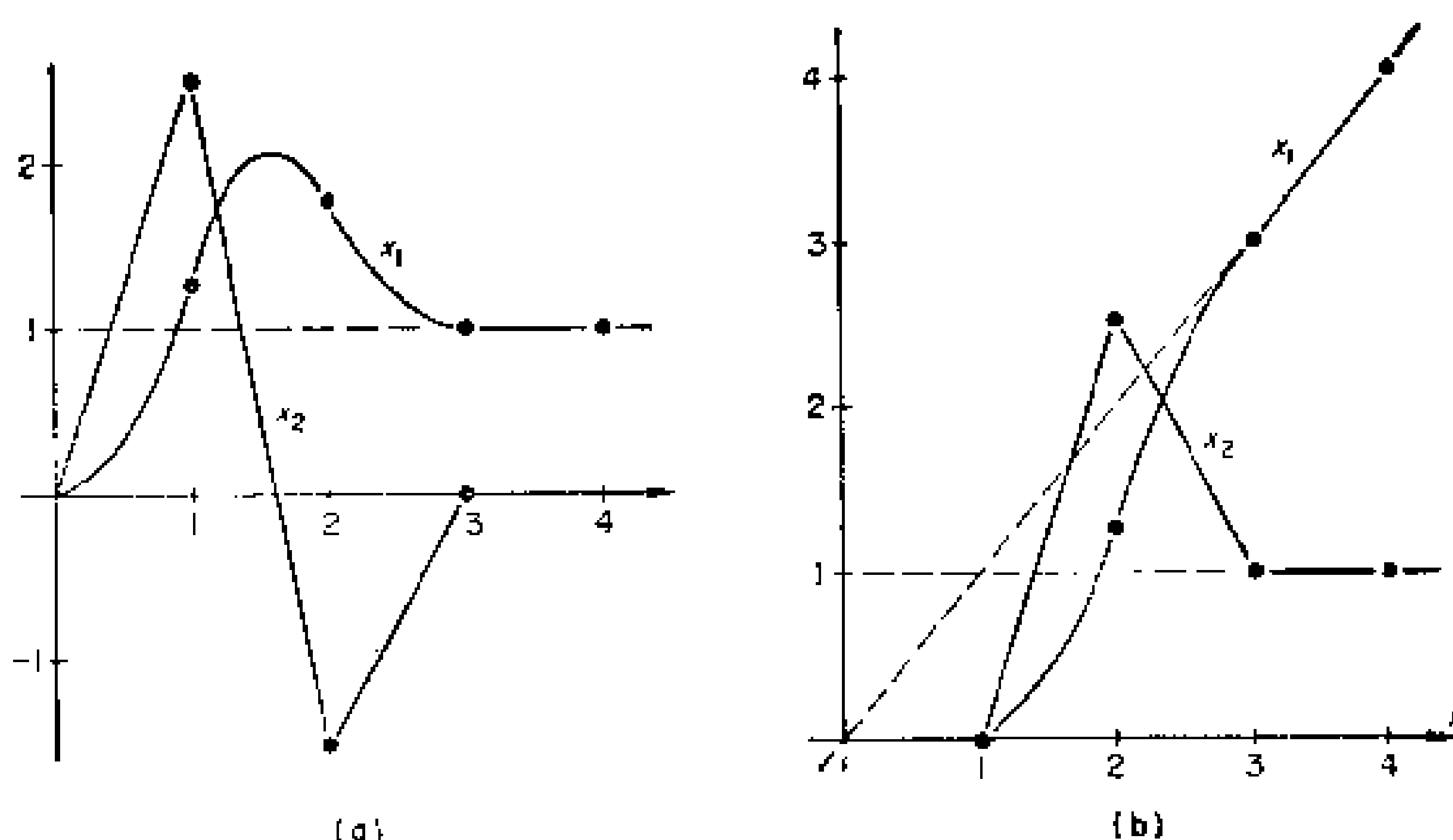


图 7.10　图7.9系统的响应：(a) 单位阶跃输入；(b) 单位斜坡输入

$$
\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{x}(1), \cdots = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5/4 & 3 & 4 & & k & \\ 0 & 0 & 5/2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 5/2 & 0 & 0 & & 0 & \end{bmatrix} \quad (7.86)
$$

这与图 7.10 (b) 所示的响应是相符的，表明它具有二类特性．这里讨论的设计方法是用数字补偿器，然而，也可用连续补偿，见习题 7.7 和 7.8．虽然最后的系统具备期望的特性，但阶跃响应有十分明显的超调现象．最小时间响应系统的特点是，其响应并不是对所有输入都得到满意的结果．如果增加动态过程的时间，情况可能有所改善，见 Eveleigh (1972).

品 质 特 性

从状态变量表示法可以求取离散时间系统的品质特性，其一般原理与 4.3 节讨论过的连续系统相同．如果离散时间系统的闭环传递函数是 $T(z)$，则阶跃响应可由

$$
y(z) = \frac{z}{z-1} T(z) = \frac{z r_1}{z-1} + G_1(z) \quad (7.87)
$$

求出来，其中，$G_1(z)$ 代表包含系统极点的部分分式展开式．输出中的阶跃响应分量由 r_1 给出，它是这样求出的，把式子乘上 $(z-1)$ 然后令 $z \to 1$ 得

$$
r_1 = T(1) = c^T[I - \Phi_C]^{-1} b \quad (7.88)
$$

对于单位调准系统*来说，r_1 必然是 1．类似地，斜坡响应从公式

$$
y(z) = \frac{T_s z}{(z-1)^2} T(z) = T_s \left(\frac{r_1 z}{(z-1)^2} + \frac{r_2 z}{z-1} + G_2(z) \right) \quad (7.89)
$$

求取，其中 T_s 是采样间隔．对于有恒定的跟踪误差的情况，r_1 必然是 1，而 r_2 给出了误差．由此所得的结论与连续系统的情况类似，即

$$
\boldsymbol{c}^T[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi}_C]^{-1}\boldsymbol{b} = 1 \quad (7.90a)
$$

---

* 即 Unity alignment，输出等于输入的调准系统．——译者注

$$\mathbf{c}^T[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Phi}_C]^{-2}\boldsymbol{b}=-r_2 \qquad (7.90b)$$

可以验证，用式 (7.84) 的 $\boldsymbol{\Phi}_C$ 可满足式 (7.90 a) 并且如所预料那样 r_2 为零. 以上关系可以转换成行列式的形式，类似于连续系统的式 (4.42a) 和 (4.42b)，见 Gupta 和 Hasdoff (1970).

最小时间响应系统和无波动系统的分析与设计为状态变量分析法的应用提供了很好的例子，并且可以用 z 平面根轨迹法与之比较. 用这两个方法都可以对系统进行设计，然而每种方法提供了不同的设计途径. 状态变量法也许是一种更为精致的分析方法，但是 z 平面法容易看清问题而且更为直接. 例如，用图 7.9(b) 去估计出使全部极点处在单位圆中特定阻尼轨迹线内的增益 K 值范围是比较容易的，对应于不稳定的 K 值也可估计出来. 如果 K 作为转移矩阵中的一个参数的话，从式 (7.84) 的 $\boldsymbol{\Phi}_{C_2}$ 就不能那样直接了当地算出这些 K 值了.

参 考 文 献

Dorf, R. C., *Time-domain Analysis and Design of Control Systems* (Addison-Wesley, Reading, Mass, 1965).

Eveleigh, V. W., *Introduction to Control System Design* (McGraw-Hill, New York, 1972).

Gupta, S. G., and Hasdorff, L., *Fundamentals of Automatic Control* (Wiley, New York, 1970).

Kuo, B. C., *Discrete-data Control Systems* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1970).

习 题

7.1 对具有

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix};\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

的离散系统，试确定式 (7.8) 中的控制向量 $\boldsymbol{g}_0$ 和 $\boldsymbol{g}_1$，并在 $\boldsymbol{x}$ 平面上绘出这些向量的草图. 在系统方块图中验证这些向量分别表示由 $u=1, 0, \cdots$, $u=0, 1, 0, \cdots$ 来抵消的状态. 在 $\boldsymbol{x}$ 平面上，确定达到

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

的 g_2 和 g_1 分量，并且根据这些分量来确定使 $x(2)=0$ 所需的控制输入。

确定得到最小时间控制所需的反馈 k^T，并验证从以上初始条件所产生的控制输入与所要求的控制输入相一致。

$$\left(G=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix};\ k^T=[\,0\ -1\,]\right)$$

7.2 对具有

$$\Phi=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix};\ b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

的离散系统，确定控制向量 g_0，g_1 和 g_2 并绘出达到

$$x(0)=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

所需的组合图。确定得到最小时间控制所需的反馈 k^T，并且验证，从 G^{-1} 求得的控制序列与达到上述 $x(0)$ 的 g 向量相一致。确定开环传递函数

$$T(z)=k^T[zI-\Phi]^{-1}b$$

的零点，绘制根轨迹图说明闭环极点是如所预料的。

$$\left(G=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix};\ \text{零点：}\ z=(1\pm\sqrt{3})/2\right)$$

7.3 连续的双重积分系统

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix};\ b=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

输入为 $u(kT)$，它从 $T=1$ 的采样保持单元加入。试确定控制向量 g_0 和 g_1，并讨论 x 的轨迹，验证这些向量代表的状态可以用 $u_0=1,\ 0,\ \cdots$，$u_1=0,1,0,\cdots$来抵消。绘出对应于

$$x(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$$

的 g_0 和 g_1，并从而确定对于 $x(2)=0$ 所要求的控制输入，以及在 x 平面上的轨迹形状。验证所要求的控制输入与从 G^{-1} 求出的相一致。

$$\left(G=\begin{bmatrix}1/2 & 3/2\\ -1 & -1\end{bmatrix}\right)$$

7.4 试考虑式(7.4)中 G 的列和能控性矩阵 P，并以此说明系统必须是完全能控的，G^{-1} 才存在。

确定图 7.7（见式(7.56)—(7.62)）振荡系统当 $\phi = 2\pi/3$ 时的 G，从而确定在初始条件

$$x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

下，使 $x(2) = 0$ 所必需的控制输入，绘出 x 平面上的相应轨迹图。

如果 $\phi = \pi$，试确定 G 并判定哪些初始状态能返回原点。用 $\boldsymbol{P}$ 解释这些结果。

$$\left(\begin{matrix} \phi = 2\pi/3,\ u = 2,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ u = 2,\ 2,\ 0,\cdots \\ \phi = \pi,\ \text{仅为}\ x_1\ \text{轴,系统不能控。} \end{matrix}\right)$$

7.5　对于以 λ_1 为三重特征值的三维系统，研究式(2.142)，证明由下式给出的 v_1，v_2 和 v_3 也是一组(广义)特征向量。

$$[v_1\ v_2\ v_3] = W\begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ 0 & t_1 & t_2 \\ 0 & 0 & t_1 \end{bmatrix} = WT$$

把式(2.142)用于式(7.47)的 $\boldsymbol{\Phi}_C$，求出特征向量矩阵 W。证明式(7.46)的 g_0，g_1 和 g_2 满足上述关系，并求出 T 的诸元素。

$$\left(W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 9 & -33 \\ 6 & -30 & 114 \end{bmatrix};\ T = \begin{bmatrix} -1/6 & -1 & -2 \\ 0 & -1/6 & -1 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{bmatrix}\right)$$

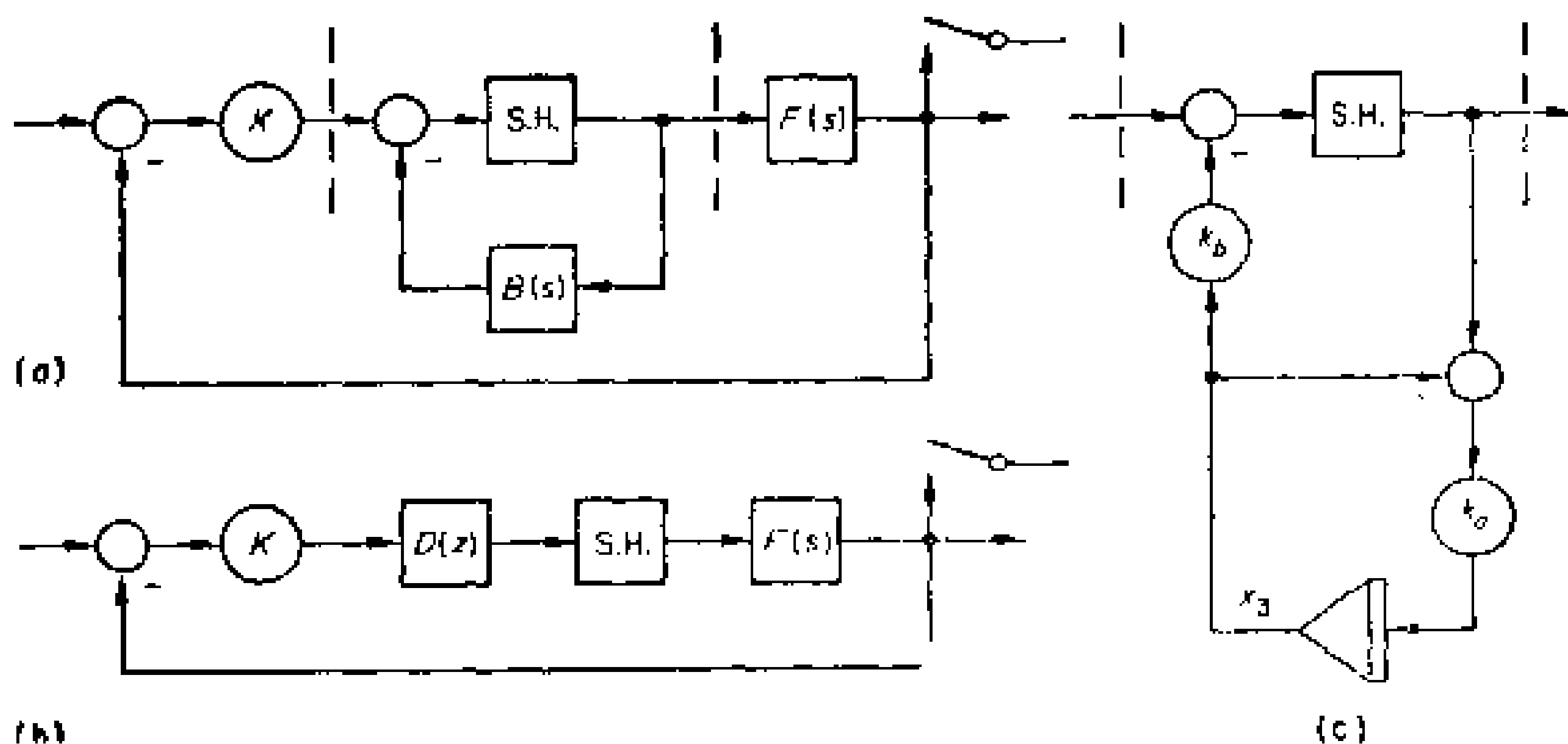


图 7.11　补偿：(a) 连续的；(b) 等效离散补偿；(c) 可能的实现

7.6　图 7.9 所示的系统，它具有式(7.84)的 $\boldsymbol{\Phi}_{C_1}$，试从

$$x(k+1) = \boldsymbol{\Phi}_{C_1}x(k) + bu(k),\ u(k) = 1,\ 0,\ 0,\ \cdots$$

求取离散脉冲响应．试证明将适当大小的脉冲响应相加可获得图 7.10 所示的阶跃和斜坡响应．

$$\left(x(0),\ x(1),\ \cdots = \begin{bmatrix} 0 & 5/4 & 1/2 & -3/4 & 0 & \\ 0 & 5/2 & -4 & 3/2 & 0 & \cdots \\ 0 & 5/2 & -5 & 5/2 & 0 & \end{bmatrix}\right)$$

7.7　在图 7.9 所示的系统中使用了离散补偿器．像图 7.11 (a) 那样，用一个连续的内环 $B(s)$ 与采样保持单元相联接可以获得类同的补偿作用．试证明图 7.11 (a) 可表示成图 7.11 (b) 的样子，并且

$$T(z) = \frac{KD(z)F(z)}{1 + KD(z)F(z)},\quad D(z) = \frac{1}{1 + Z\{H \times B(s)\}}$$

一般的背景材料可参考附录第 3.4 节，而 $D(z)$ 是给定的，$Z\{H \times B(s)\}$ 为保持器与 $B(s)$ 串联的 z 变换．（提示：假定用 $B(s)/K$ 接入反馈通道，于是把整个回路变成一个简单的前向通道和两个相并联的反馈通道．）

7.8　图 7.11 (c) 的结构给出了一个 $B(s)$ 的可能方案，用它可以实现图 7.9（见式 (7.82b)）的补偿器．从习题 7.7

$$D(z) = \frac{z - 3/5}{z + 3/4} = \frac{1}{1 + Z\{H \times B(s)\}}$$

求取所需要的 k_a 和 k_b 值．

以 x_3 作为补偿器的状态，写出整个系统的 Φ_C，并求出脉冲响应．将结果与习题 7.6 进行比较．

$$\left(\begin{aligned} & k_a = 3/5;\quad k_b = 27/8; \\ & \Phi_C = \begin{bmatrix} -1/4 & 1 & -27/16 \\ -5/2 & 1 & -27/8 \\ -1 & 0 & -3/4 \end{bmatrix};\quad b = \begin{bmatrix} 5/4 \\ 5/2 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ & x_1,\ x_2 \text{ 同习题 7.6};\ x_3 = 0,\ 1,\ -2,\ 1,\ 0,\ \cdots \end{aligned}\right)$$

附录 1　初始条件零点和在 s 平面上计算留数

A1.1　初始条件零点

用拉普拉斯变换法解微分方程的一个重要特点是可以方便地将初始条件引入微分方程的解中. $x(t)$ 的各阶导数的拉普拉斯变换为

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} \to sx(s) - x(0) \\
&\frac{d^2x}{dt^2} \to s^2x(s) - sx(0) - x'(0) \\
&\quad\vdots \\
&\frac{d^nx}{dt^n} \to s^nx(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) \\
&\qquad - \cdots - sx^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0)
\end{aligned}\right\} \tag{A1.1}
$$

式中，$x(s)$ 是 $x(t)$ 的拉氏变换，$x(0)$，$x'(0)$，$\cdots$，$x^{(n-1)}(0)$ 是 $x(t)$ 及其各阶导数的初始值. 应用等式 (A1.1)，就可将一般微分方程

$$
a_n\frac{d^nx}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = u \tag{A1.2a}
$$

变换为

$$
\begin{aligned}
&(a_ns^n + \cdots + a_1s + a_0)x(s) - (z_{n-1}s^{n-1} \\
&\qquad + \cdots + zs_1 + z_0) = u(s)
\end{aligned} \tag{A1.2b}
$$

式中，系数 z_{n-1}，$\cdots$，z_0 是初始条件和方程式系数 a_n，$\cdots$，a_0 的组合. 最后得到 $x(s)$ 为

$$
x(s) = \frac{z_{n-1}s^{n-1} + \cdots + z_1s + z_0}{a_ns^n + \cdots + a_0} + \frac{u(s)}{a_ns^n + \cdots + a_0} \tag{A1.3a}
$$

$$
= T(s)Z(s) + T(s)u(s) \tag{A1.3b}
$$

式中，$T(s)Z(s)$ 表示初始条件响应；$T(s)u(s)$ 表示输入响应；

$T(s)$ 是通常的传递函数 $\left\{=\dfrac{1}{(a_n s^n+\cdots+a_0)}\right\}$. $Z(s)$ 包含由指定的初始条件所决定的零点。可选取这些初始条件零点与 $T(s)$ 的一个或几个极点相消. 在这种情况下，初始条件响应不包括任何与被相消的极点对应的固有振型. 如果上述分析应用于一个一般的二阶方程

$$a_2\frac{d^2x}{dt}+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=0$$

那么

$$x(s)=\frac{z_1 s+z_0}{a_2s^2+a_1s+a_0} \tag{A1.4}$$

式中，$z_1=a_2x(0)$，$z_0=a_1x(0)+a_2x'(0)$，而 $Z(s)$ 在实轴上有单一零点，得到与式 (1.40a) 相同的一般形式. 与式 (1.38) 或图 1.8 对应的 x_1 的微分方程为

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+3\frac{dx_1}{dt}+2x_1=0$$

由上式可得

$$x_1(s)=\frac{(s+3)x_1(0)+x_1'(0)}{s^2+3s+2} \tag{A1.5a}$$

因为在系统中 $x_1'=x_2$，所以可以写成

$$x_1(s)=\frac{(s+3)x_1(0)+x_2(0)}{s^2+3s+2} \tag{A1.5b}$$

对于图 A1.1 (a) 的 RC 电路，从节点方程

$$C_1R_1R_2\frac{dv_1}{dt}+v_1(R_1+R_2)=R_1v_2 \tag{A1.6a}$$

$$C_2R_2\frac{dv_2}{dt}+v_2=v_1 \tag{A1.6b}$$

消去 v_1 并且引入图示数值，得到 v_2 的 s 域响应为

$$v_2(s)=v_2(0)\frac{s+2.5+(v_2'(0)/v_2(0))}{s^2+2.5s+1} \tag{A1.7}$$

上式有特征值 -0.5，-2. 在这一系统中，代入 C_2 和 R_2 的图示数值后，由式 (A1.6 b) 得到

$$v_2' = (v_1 - v_2)/C_2R_2$$
$$= (v_1 - v_2) \qquad (A1.8)$$

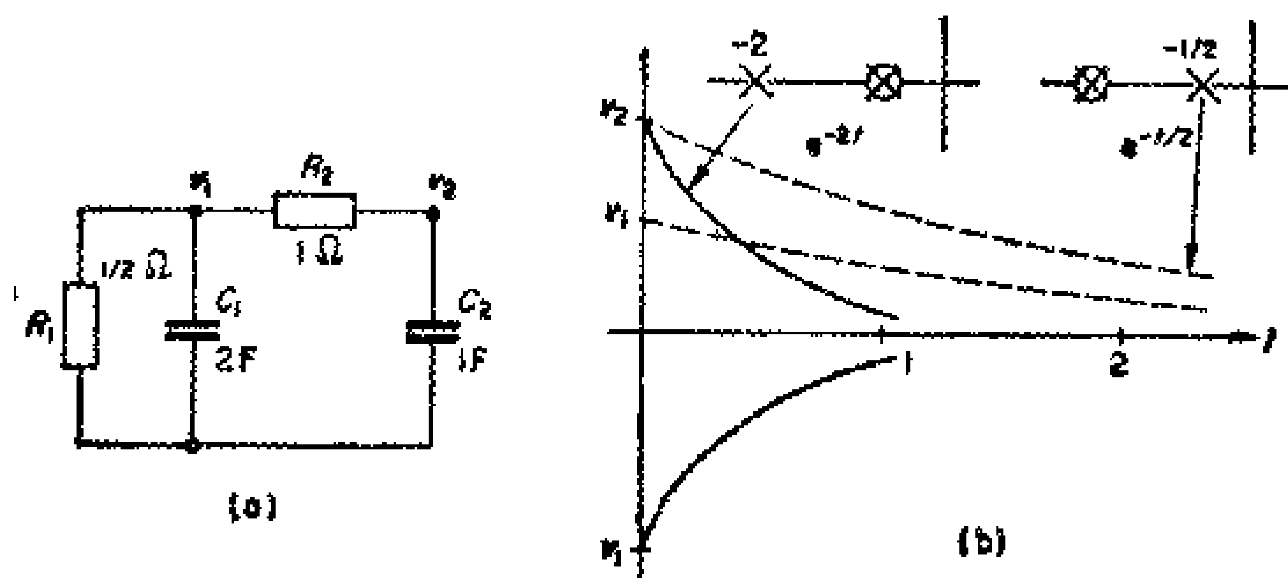


图 A1.1　只产生一个振型的初始条件：
(a) 系统；(b) 只产生一个振型的条件

因此

$$v_2'(0)/v_2(0) = -0.5 \quad 消去振型\ e^{-2t} \qquad (A1.9a)$$
$$v_2'(0)/v_2(0) = -2 \quad 消去振型\ e^{-t/2} \qquad (A1.9b)$$

假设 $v_2(0)$ 为 1，试从式 (A1.8) 决定满足式 (A1.9a) 或 (A1.9b) 的 $v_1(0)$ 的数值，它们分别消去了一个极点．最后求出电路中相应的初始电流数值．所建立的特定的初始条件按单个指数振型而衰减，如图 A1.1(b) 所示．

A1.2　脉冲类输入和初始条件零点

讨论脉冲类信号的拉普拉斯变换，可以得到初始条件零点项 $z(s)$ 的另一种解释——将它看作加到系统去以建立初始条件所用的信号．如果将面积为

$$k_0 = h\Delta t$$

的脉冲加到图 A1.2 (a) 所示的输出为 x_3 的积分器上，输出将是一条达到 k_0 的斜线．如果脉冲面积保持为常数 k_0，而 $\Delta t \to 0$，那么在极限情况下，脉冲的幅值趋于无穷大，而宽度为零，这样，上述的脉冲就变成一个面积为 k_0 的 **“理想脉冲”*** $k_0\delta(t)$，其中 $\delta(t)$ 是单

* 本书中将 impulse 与 pulse 作了区分，前者指幅度趋向 ∞，宽度趋于 0 的脉冲，故译为“理想脉冲”．——译者注

位面积理想脉冲，也就是

$$\int k_0\delta(t)dt = k_0$$

积分器的输出接近一个阶跃. 因此，如果一个理想脉冲 $k_0\delta(t)$ 加到一串积分器上(如图 A1.2(a) 所示)，那么

$$u = k_0\delta(t) \to x_3(0_+) = k_0;\ x_2(0_+) = 0;$$
$$x_1(0_+) = 0 \tag{A1.10}$$

图 A1.2(b) 的二重脉冲在 x_3 处将产生三角形脉冲. 可以预想到在极限情况下，二重脉冲能够变成二重理想脉冲或者"二重 $\delta'(t)$"，$\delta'(t)$有这样的特性，经过一次积分之后它变成一个理想脉冲.那么

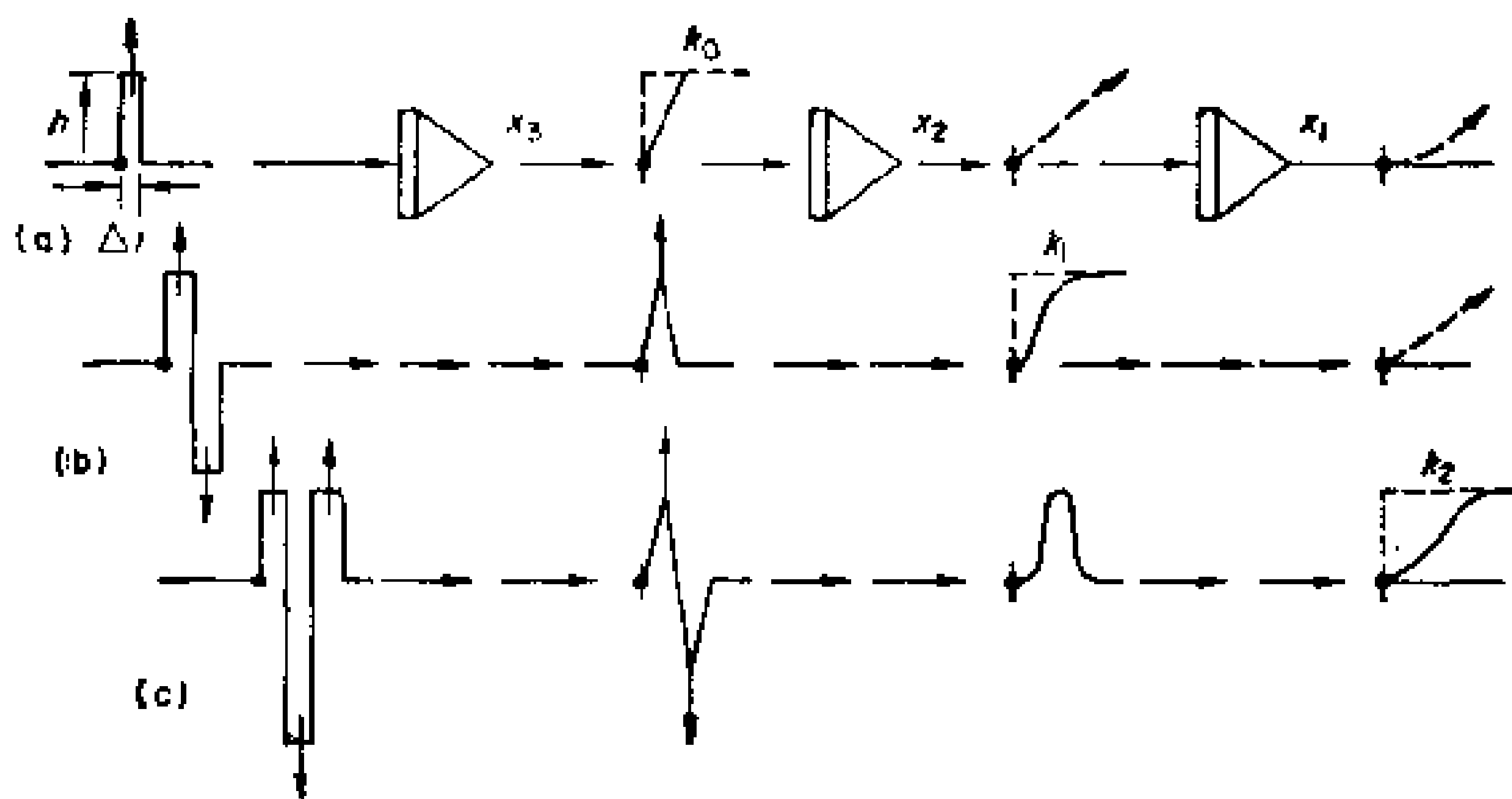


图 A1.2 奇异函数：(a) 理想脉冲；(b) 二重脉冲；(c) 三重脉冲

$$u = k_1\delta'(t) \to x_3 = k_1\delta(t);$$
$$x_2(0_+) = k_1;\ x_1(0_+) = 0 \tag{A1.11}$$

这种概念可以推广到三重脉冲，在极限情况下，三重 $\delta''(t)$ 如图 A1.2(c) 所示，而且

$$u = k_2\delta''(t) \to x_3 = k_2\delta'(t)$$
$$x_2 = k_2\delta(t);\ x_1(0_+) = k_2 \tag{A1.12}$$

上面的结果表明施加一般的输入

$$u = k_0\delta(t) + k_1\delta'(t) + k_2\delta''(t) \tag{A1.13}$$

可使

$$\boldsymbol{x}(0_+) = \begin{bmatrix} k_2 \\ k_1 \\ k_0 \end{bmatrix} \tag{A1.14}$$

施加一个适当的脉冲类输入，系统可以跃变到任何的状态.

这些（理想的）信号叫做**奇异函数**；参看 Gupta（1966）和 MacFarlane（1970）. 由下所列的拉普拉斯变换可以看到这些信号是常用测试信号——阶跃、斜坡等等的扩展.

$$\left.\begin{array}{llllll} \int dt \longleftrightarrow \dfrac{d}{dt} & & & & & \\ f(t)\cdots, & t, & 1, & \delta(t), & \delta'(t), & \delta''(t)\cdots \\ & \text{斜坡} & \text{阶跃} & \text{理想脉冲} & \text{二重脉冲} & \text{三重脉冲} \\ f(s)\cdots & \dfrac{1}{s^2}, & \dfrac{1}{s}, & 1, & s, & s^2\cdots \\ & \dfrac{1}{s} \longleftrightarrow s & & & & \end{array}\right\} \tag{A1.15}$$

在时域中，上列相邻信号之间有微分或积分的关系，而在 s 域中，则是乘 s 或除 s 的关系.

由上述的概念可以把初始条件零点 $Z(s)$ 看作是脉冲类输入，它建立系统所需的初始条件. 例如图 A1.1 (a) 的 RC 系统由式 (A1.7) 给出 $v_2(s)$，式中传递函数 $T(s)$（输入应该加在哪里？）有图 A1.3 的形式，而且

$$Z(s) = v_2(0)(s + 2.5 + \{v_2'(0)/v_2(0)\}) \tag{A1.16a}$$

上式给出一个零点为

$$s = -\{2.5 + v_2'(0)/v_2(0)\} \tag{A1.16b}$$

对应的脉冲类输入为

$$v_2(0)[\{2.5 + v_2'(0)/v_2(0)\}\delta(t) + 1\delta'(t)] \tag{A1.17}$$

在图 A 1.3 中如果输入一个单位理想脉冲 $\delta(t)$，则在 $x_2(=v_2)$ 得到一个阶跃，而输入一个二重脉冲 $\delta'(t)$ 时，在 x_2 得到一个理想脉冲，它在 $x_1(=v_2)$ 产生一个阶跃. 在 x_2 的理想脉冲通过反馈

(-2.5) 重复循环，使 x_2 得到 -2.5 阶跃. 因此能够用一般输入

$$k_0\delta(t) + k_1\delta'(t) \tag{A1.18}$$

来建立系统的任何初始条件. 式 (1.40a) 的分子表示脉冲类输入

$$\{3x_1(0) + x_2(0)\}\delta(t) + x_1(0)\delta'(t) \tag{A1.19}$$

可以验证，在式 (A1.19) 中令 $x_1(0) = x_2(0) = 1$ 确实能够在图 1.8 的 x_1, x_2 处得到与式 (1.40c) 相同的初始条件.

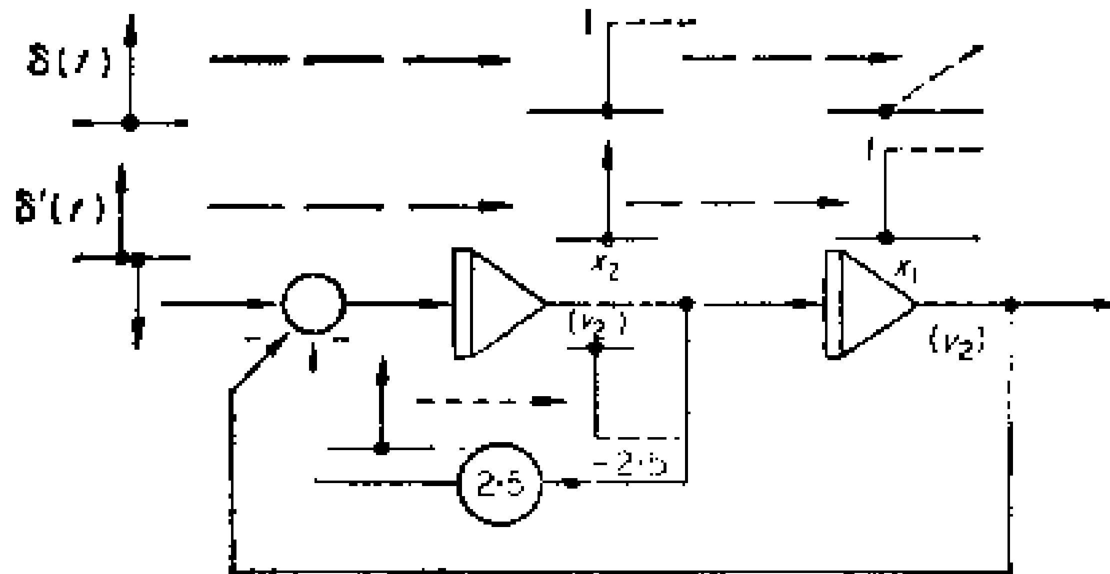


图 A1.3 用脉冲类输入建立初始条件

A1.3 计 算 留 数

为了得到对应于给定 $x(s)$ 的 $x(t)$，其中 $x(s)$ 是多项式的比，通常的方法是用部分分式展开

$$x(s) = \frac{c_m s^m + c_{m-1}s^{m-1} + \cdots}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots}$$

$$= \frac{r_1}{(s-s_1)} + \frac{r_2}{(s-s_2)} + \cdots \tag{A1.20}$$

式中，r_1, r_2, $\cdots$是极点 s_1, s_2, $\cdots$处的留数，然后对每一项求反变换得到

$$x(t) = r_1 e^{s_1 t} + r_2 e^{s_2 t} + \cdots \tag{A1.21}$$

如果 $x(s)$ 已经写成零点-极点的形式，或者能够容易地分解成因式

$$x(s) = \frac{(s-s_a)(s-s_b)\cdots}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots} \tag{A1.22}$$

则可直接从零点-极点图用图解的方法得到留数. 对于简单的情况,观察一下,就可写出留数. 式(A1.22)中各个因子都可以写成

$$(s-s_k)=(s-(s_k)) \tag{A1.23}$$

式中,s_k 是一个极点或零点,而 s 是任意的. 正如图 A1.4(a) 的右半平面所示,上式右边的两个分量 s 和 s_k 分别可以表示为 s 平面中的向量,而且式(A1.23)表示两个向量之差,它可以直接从图中得到,由 d_k 和 $\angle\phi_k$ 表示. 对因子作这样的解释,使得无论 s 为任何值都能够得到式(A1.22)的幅值和相角. 它是根轨迹法的基本内容之一.

为了确定式(A1.20)的 r_1,对式两边都乘以 $(s-s_1)$,得到

$$\frac{(s-s_1)(s-s_a)(s-s_b)\cdots}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)\cdots}=\frac{(s-s_1)r_1}{(s-s_1)}+\frac{(s-s_1)r_2}{(s-s_2)}+\cdots \tag{A1.24}$$

如果 $s\to s_1$,右边只剩下 r_1,得到

$$\frac{(s_1-s_a)(s_1-s_b)\cdots}{(s_1-s_2)(s_1-s_3)\cdots}=r_1 \tag{A1.25}$$

式中,左边表示零极点图的其他因子在极点 s_1 处的数值,并且可以用图解法求出它们的值. 图 A1.4(a) 左半平面是一个一般的例子,其中

$$|r_1|=\frac{d_a d_b}{d_2 d_3}$$

$$\angle r_1=(\phi_a+\phi_b)-(\phi_2+\phi_3)=\theta_1 \tag{A1.26}$$

与此极点对应的固有振型分量为

$$|r_1|e^{(s_1t+j\theta_1)}$$

这个一般的结果仅适用于单极点(不重复的极点)的情况. 在重极点上计算留数是较复杂的,它包含有微分关系.

例如,图 A1.4(b) 给出图 A1.1 中 RC 电路对于不同初始条件零点位置的一般瞬态形式. 可以验证,对于图示各零点位置,它们的瞬态表达式几乎都可以用观察的方法写出来,即

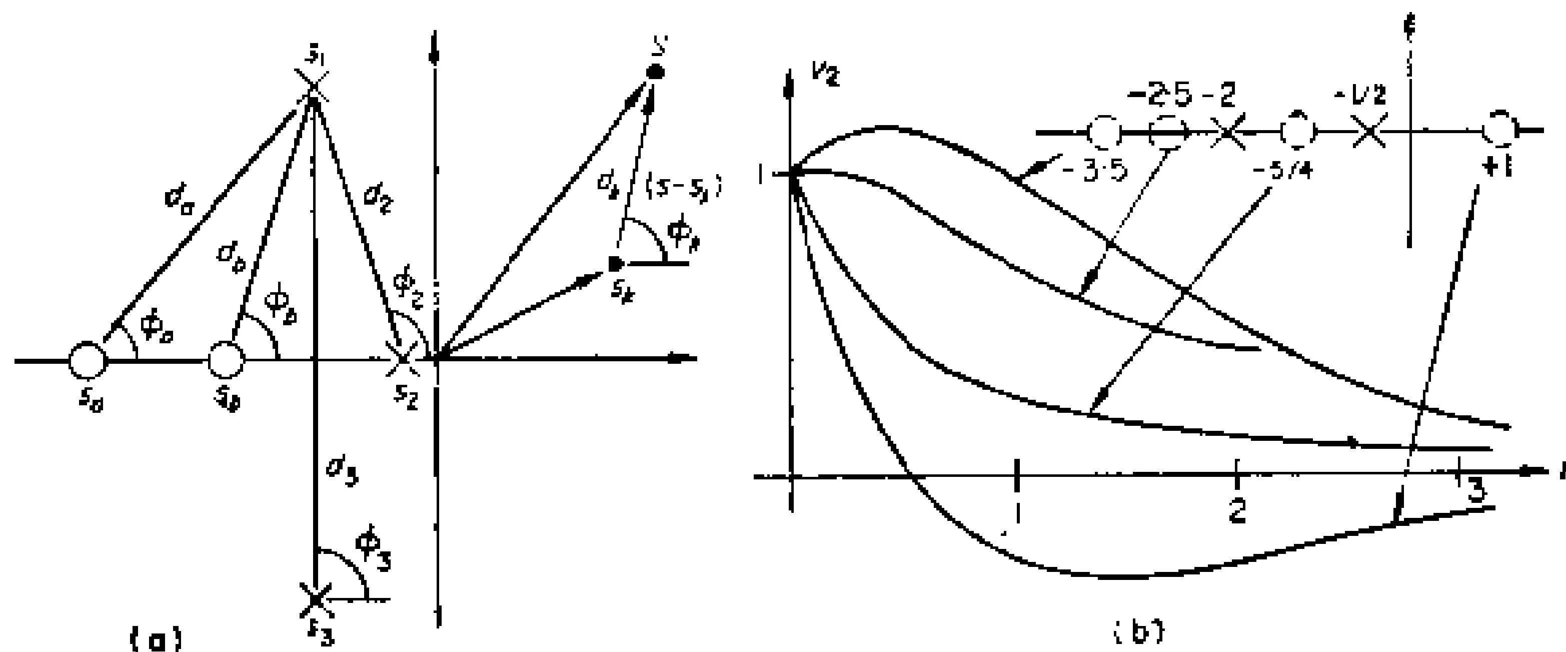


图 A1.4 计算留数：(a) 图解法；(b) 对图 A1.1 (a) 不同零点位置的响应

$$\begin{aligned}
&(s=+1) && v_2 = 2e^{-2t} - e^{-t/2} \\
&(s=-5/4) && v_2 = (e^{-2t} + e^{-t/2})/2 \\
&(s=-2.5) && v_2 = (4e^{-t/2} - e^{-2t})/3 \\
&(s=-3.5) && v_2 = 2e^{-t/2} - e^{-2t}
\end{aligned} \tag{A1.27}$$

并且，零点的位置与从式 (A1.16b) 得到的 $v_2'(0)/v_2(0)$ 比值相对应．

复数极点留数的计算可由图 A1.5 (a) 的 LCR 电路说明．图中开关既可接到 p 点也可接到 q 点来建立电路的初始条件，而且

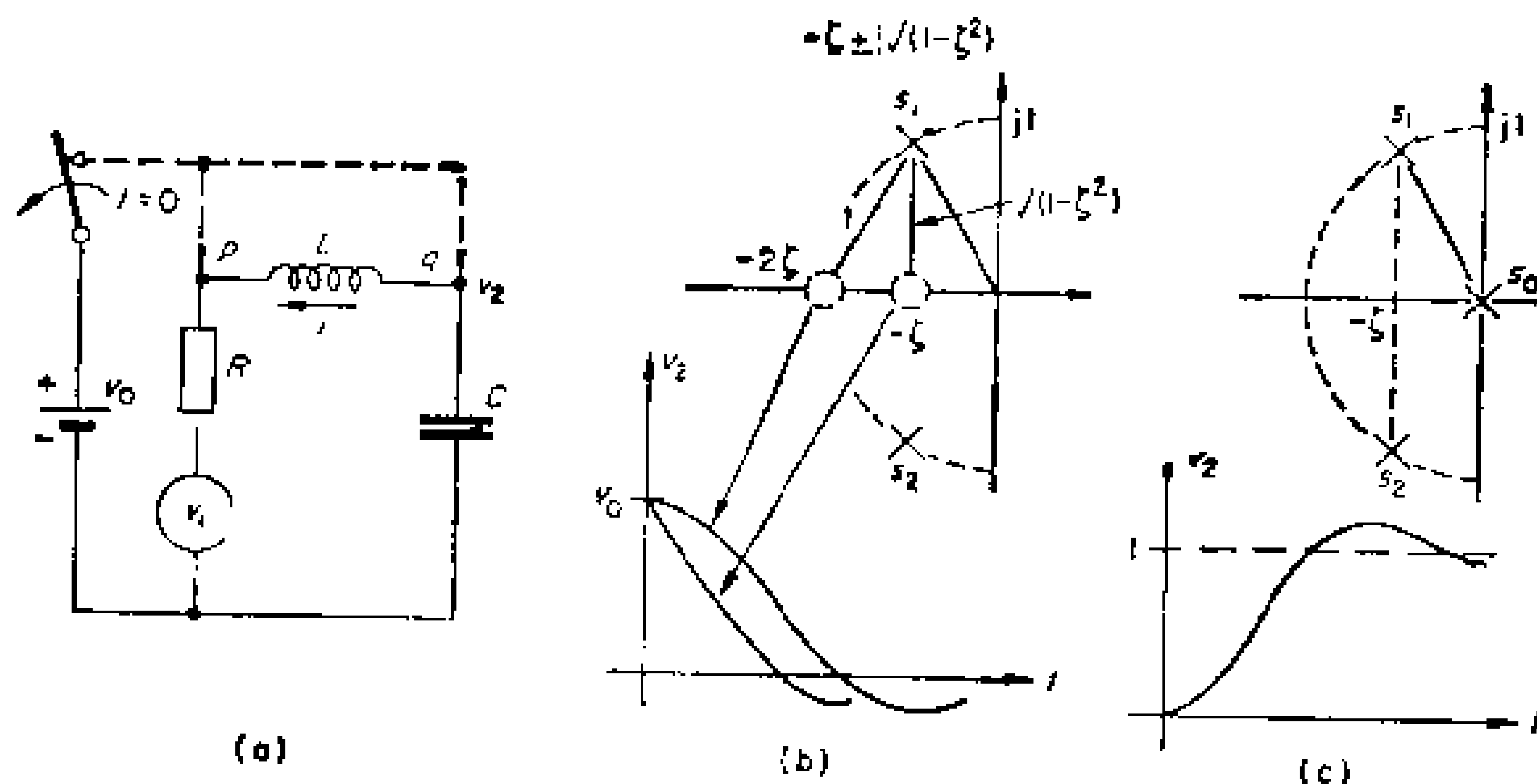


图 A1.5 复数极点的留数；(a) LCR 电路；
(b) 初始条件响应；(c) 驱动响应

当 $t=0$ 时，开关断开。输入信号 v_1 可以从一个零内阻的理想电压源加到电路上。如果 v_1 为零，v_2 的微分方程为

$$LC\frac{d^2v_2}{dt^2}+CR\frac{dv_2}{dt}+v_2=0 \tag{A1.28}$$

上式可以表示为

$$\frac{d^2v_2}{dt^2}+2\zeta\omega_0\frac{dv_2}{dt}+\omega_0^2v_2=0 \tag{A1.29}$$

式中

$$1/LC=\omega_0^2;\quad CR=2\zeta/\omega_0$$

为了方便起见，假定 ω_0 取值为 1，那么考虑到初始条件，取方程式(A1.29)的拉氏变换，可得到

$$v_2(s)=\frac{v_2(0)(s+2\zeta+\{v_2'(0)/v_2(0)\})}{s^2+2\zeta s+1} \tag{A1.30}$$

上式在单位圆上有极点(如图 A1.5(b) 所示)，而且有一个初始条件零点位于

$$s=-(2\zeta+\{v_2'(0)/v_2(0)\}) \tag{A1.31}$$

如果开关接到 p 点，开关闭合后使电容器充电到 v_0，然后在 $t=0$ 时断开开关，初始条件就是

$$v_2(0_+)=v_0;\quad v_2'(0_+)=0 \tag{A1.32}$$

因为当 $t=0_-$、0_+ 时 i 都为零，然后随着 t 增加 i 增大，所以微分的初始条件如式(A1.32)所示。从式(A1.31)得到初始条件零点位于 -2ζ。而从图 A1.5(b) 的 s 平面图可知 s_1 的留数 r_1 可以写成

$$\left.\begin{aligned}|r_1|&=\frac{1}{(2\sqrt{1-\zeta^2})}\\ \angle r_1&=-\pi/2+\tan^{-1}\{\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta\}\\ &=-\tan^{-1}\{\zeta/\sqrt{(1-\zeta^2)}\}=-\theta_1\end{aligned}\right\} \tag{A1.33}$$

留数 r_2 是共轭的，因此

$$v_2(t)=\frac{1}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}e^{-\zeta t}\cos\{\sqrt{(1-\zeta^2)}\,t-\theta_1\} \tag{A1.34}$$

如果开关接到 q 点，在开关断开之前，电感中已有电流 v_0/R，开关

断开后，初始条件是

$$\left.\begin{aligned} v_2(0_+) &= v_0 \\ v_2'(0_+) &= -v_0/CR = -v_0/2\zeta \end{aligned}\right\} \quad \text{(A1.35)}$$

因为在 $t=0_-$ 和 $t=0_+$ 之间 i 必须是连续的（瞬时改变 i 要求无穷大的电压），而且在 $t=0_+$ 时 i 流过 C，使 v_2 立即有一个负斜率，所以有上列微分条件． 从式（A1.31）可知初始条件零点位于

$$s = -(2\zeta - 1/2\zeta) = (1-4\zeta^2)/2\zeta \quad \text{(A1.36)}$$

对于 $\zeta = 1/\sqrt{2}$ 的特殊情况，初始条件零点和两个极点在同一条直线上．而且

$$|r_1| = 1/2; \quad \angle r_1 = 0 \quad \text{(A1.37)}$$

v_2 有比较简单的形式

$$v_2(t) = e^{-t/\sqrt{2}} \cos\sqrt{2}\, t \quad \text{(A1.38)}$$

如果不是引入初始条件而是从 v_1 处加入一个阶跃，那么

$$v_2(s) = \frac{1}{s(s^2+2\zeta s+1)} \quad \text{(A1.39)}$$

它具有图 A1.5 (c) 的图形．观察该图形可得到

$$\left.\begin{aligned} |r_1| &= \frac{1}{2\sqrt{(1-\zeta^2)}} \\ \angle r_1 &= -90^\circ - (90^\circ + \tan^{-1}\{\zeta/\sqrt{(1-\zeta^2)}\}) \\ &= -180^\circ - \theta_1 \\ r_0 &= 1, \quad \angle r_0 = 0^\circ \end{aligned}\right\} \quad \text{(A1.40)}$$

因此（式（A1.33）和式（A1.41）的 θ_1 有同样的数值．为什么？）

$$v_2(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta t} \cos\{\sqrt{(1-\zeta^2)}t - \theta_1\} \quad \text{(A1.41)}$$

其中

$$\theta_1 = \tan^{-1}[\zeta/\sqrt{(1-\zeta^2)}]$$

假设输入是指数脉冲 $e^{-\alpha t}$，并使输入的极点沿负实轴移动，如果 $\alpha = \zeta$，则所有极点排列成一直线．对于这种形态（有时称为奇妙的三个极点），$v_2(t)$ 摆向零值但不会变成负值． 如果直接从 s 平

面零极点图中考虑留数能否明显看出这一点?

参 考 文 献

Gupta, S. C., *Transform and State Variable Theory in Linear Systems* (Wiley, New York, 1966) chapter 2.

MacFarlane, A. G. J., *Dynamical System Models* (Harrap, London, 1970) chapter 3.

附录2 矩阵的秩

A2.1 矩阵的秩

可以把矩阵看作是一个转换，它将一个平面或空间中的点或轨线转换成另一个平面或空间中对应的点或轨线．矩阵的**秩**是一个重要的性质，这个性质可以引进关于转换的约束．系统的能控性和能观测性可根据适当矩阵的秩来判定，在研究多重特征值和最小时间控制中也碰到秩的问题． 用 3×3 矩阵来研究秩的问题是方便的，因为这可以获得秩的几何解释，而所得的一般法则却适用于任意维的矩阵．

一般关系式是

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{x} \tag{A2.1}$$

式中，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列，这意味着把 $\boldsymbol{x}$ 中的各轴 x_1，x_2 和 x_3 转换到 $\boldsymbol{y}$ 中由 $\boldsymbol{A}$ 的列给定的方向；例如，若把 x_1 转换到 $\boldsymbol{y}$ 中去，则由

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\alpha}_1 x_1$$

或

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} x_1 \tag{A2.2}$$

给出，如图 A2.1(a) 所示，其它轴也类似． 如果向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是独立的，如图 A2.1(a)——这就意味着转换后 x 的某一轴不可能通过沿转换后其它两条轴方向的分量的任何组合来得到——这个矩阵就称为**满**秩的． 一般说来，一个矩阵的秩定义为独立的列数(或行数)，对于式 (A2.1)，如果三个列都是独立的，那么矩阵的秩就是 3． 如果一个方阵是满秩的，它便规定了一个唯一的从点到点的转换，由于存在逆阵，所以这个转换是可逆的；如果

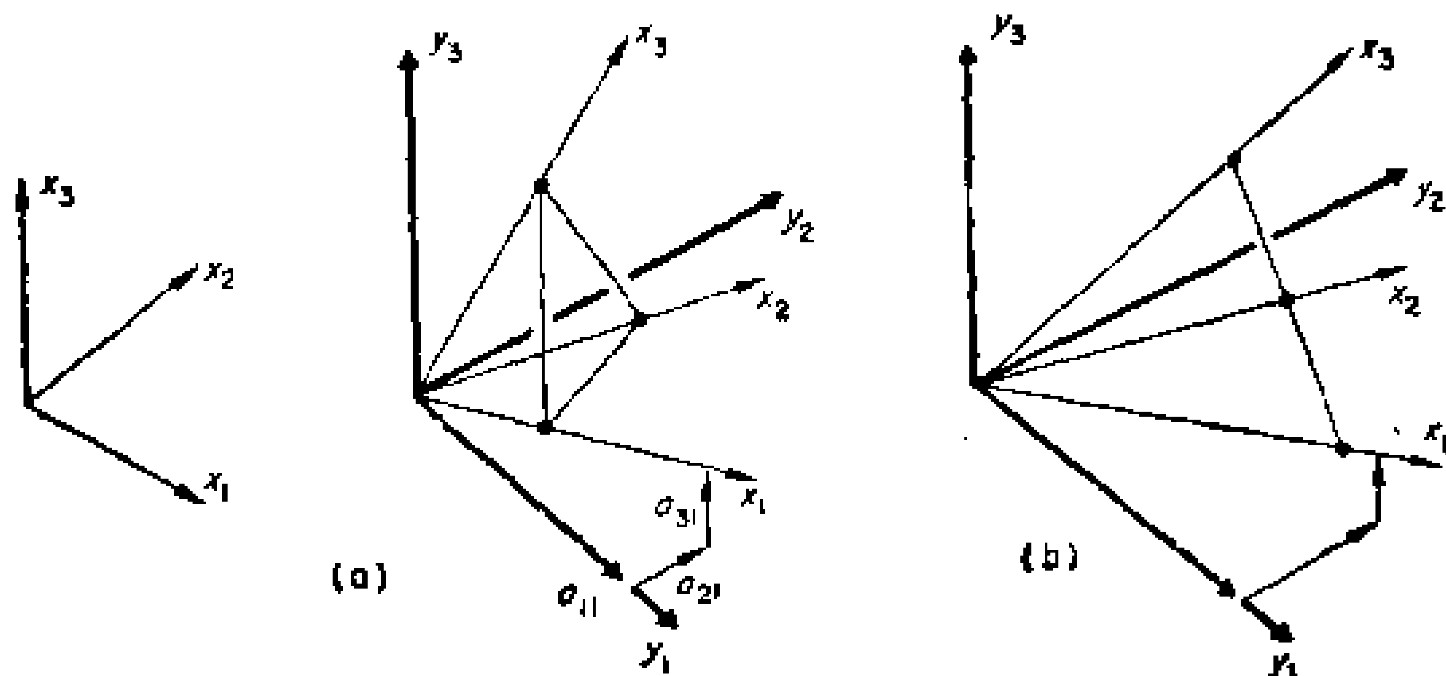


图 A2.1 轴的矩阵变换：(a) 满秩 (3)；(b) 降秩 (2)

$$\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k,\ \text{则}\ \boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}_k$$

从形式上看，如果对于

$$k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3=0 \tag{A2.3}$$

只有当 k_1，k_2 和 k_3 全为零时才有解，则 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ 与 $\boldsymbol{a}_3$ 各列是独立的.

向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ 和 $\boldsymbol{a}_3$ 有可能位于 $\boldsymbol{y}$ 中的一个平面上，如图 A2.1(b) 所示. 在这种情况下，此平面可以由 $\boldsymbol{a}$ 中任意两个（认为是独立的）向量来确定，而且另一个向量可以由这两个独立向量表达成这样的关系式

$$\boldsymbol{a}_2=(k_1\boldsymbol{a}_1+k_3\boldsymbol{a}_3) \tag{A2.4}$$

如果这些向量位于 $\boldsymbol{y}$ 中的一个平面，则任意 $\boldsymbol{x}$ 值都转换到这个平面上，而从 $\boldsymbol{x}$ 不可能达到 $\boldsymbol{y}$ 的全部. 由于矩阵有两个独立向量，因此它的秩是 2. 作为一个极端情况，所有 $\boldsymbol{a}$ 向量可能都在同一个方向上，在这种情况下，所有 $\boldsymbol{x}$ 值都转换到 $\boldsymbol{y}$ 中的一条直线上，此时矩阵的秩是 1. 式 (A2.4) 可以写为

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1\ \ (k_1\boldsymbol{a}_1+k_3\boldsymbol{a}_3)\ \ \boldsymbol{a}_3]=[\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_3]\begin{bmatrix}1 & k_1 & 0\\ 0 & k_3 & 1\end{bmatrix} \tag{A2.5}$$

并且用图 A2.2(a) 给以图解表示. 这样，任意 $\boldsymbol{x}$ 都转换到由 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_3$ 所确定的平面上，如图 A2.2(b) 所示，并且 $\boldsymbol{y}$ 中的一个由 p_1 和 p_3 的特殊值确定的点对应于

$$x_1 + k_1 x_2 = p_1 \tag{A2.6a}$$

$$x_3 + k_3 x_2 = p_3 \tag{A2.6b}$$

式(A2.6a)和(A2.6b)各确定 $\boldsymbol{x}$ 的一个平面，

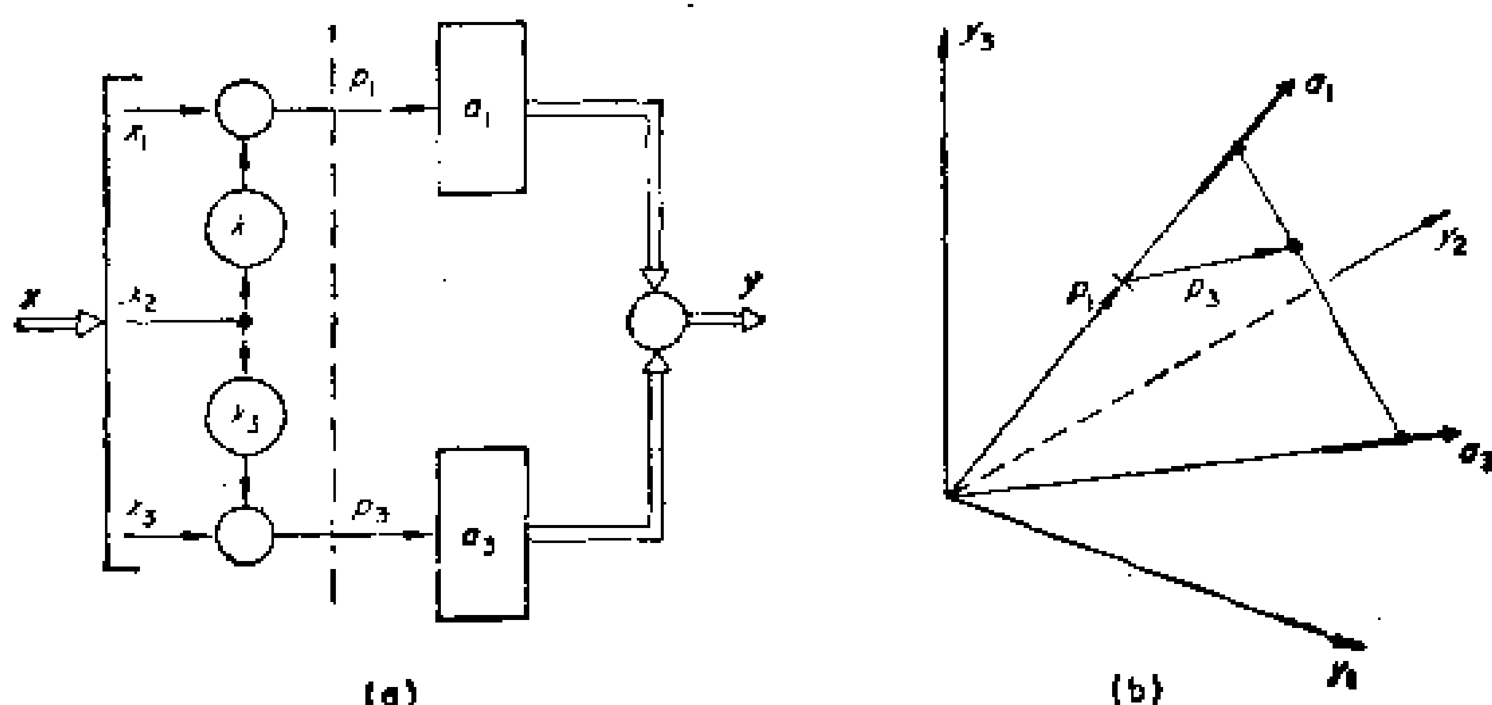


图 A2.2 秩是 2 的矩阵；(a) 方块图表示；(b) $\boldsymbol{y}$ 中的 $\boldsymbol{x}$ 平面

它们的交线确定了 $\boldsymbol{x}$ 中的一条直线．因此，$\boldsymbol{x}$ 中的一条直线转换到 $\boldsymbol{y}$ 中成了一个点，反之，$\boldsymbol{y}$ 中的一点转换到 $\boldsymbol{x}$ 中是一条直线，这表明不存在一个唯一的关系．例如

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \tag{A2.7}$$

各列之间有如下关系式：

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_3 \tag{A2.8}$$

而且可把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 写成式(A2.5)的形式(取 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 为独立的列)，得

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \tag{A2.9a}$$

或

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1 + x_2) \\ (2x_2 + x_3) \end{bmatrix} \tag{A2.9b}$$

如果取 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 作为独立的列，由式(A2.8)可把列的关系式写为

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_1}{2}\right) \tag{A2.10}$$

给出

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \tag{A2.11a}$$

或

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - (x_3/2) \\ x_2 + (x_3/2) \end{bmatrix} \tag{A2.11b}$$

这时三维 $\boldsymbol{x}$ 空间的任意轨线转换到 $\boldsymbol{y}$ 中就成了由 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 所确定的平面上的一条轨线.

A2.2 秩的确定，初等运算

一个矩阵的秩不会由于行(或列)进行交换，或由于乘以倍数的行(或列)后进行加或减而改变，这样的运算称为**初等**运算. 应用初等运算，能够将矩阵变换成这样一种形式，它的秩通过观察就可以看出来. 如果

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\alpha}_1 \ \ \boldsymbol{\alpha}_2 \ \ \boldsymbol{\alpha}_3] \tag{A2.12}$$

应用初等运算能够将这个矩阵变换成下列形式之一：

$$\boldsymbol{A}_3 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix};\ \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & 0 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 \\ \gamma_{21} & 0 & 0 \\ \gamma_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A2.13}$$

很明显，$\boldsymbol{A}_3$ 有三个独立的列. 因为 $\boldsymbol{A}_3$ 是下三角阵，没有那一列可以通过另外两列的任意组合来表示，因此 $\boldsymbol{A}_3$ 是满秩的. 然而，$\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 分别只有一个和两个独立的列，因此它们的秩分别为 1 和

2.

将 $\boldsymbol{A}$ 变换成式(A2.13)的形式所使用的一般方法，是(比方)将列 $\boldsymbol{a}_1$ 的适当的倍数加(或减)到 $\boldsymbol{a}_2$ 或 $\boldsymbol{a}_3$ 上，并使所得两列的顶上元素为零. 比如

$$[\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1(a_{12}/a_{11}) \quad \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_1(a_{13}/a_{11})]$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{b}_2 \ \boldsymbol{b}_3] \tag{A2.14}$$

然后重复这个过程，把 $\boldsymbol{b}_2$ 的倍数加到 $\boldsymbol{b}_3$，从而得出 $\boldsymbol{A}_3$ 的形式. 如果 $\boldsymbol{A}$ 不是满秩的，就会得到 $\boldsymbol{A}_2$ 或 $\boldsymbol{A}_1$ 的形式. 例如，

$$\boldsymbol{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{(列 3 − 2 倍列 1)}]{\text{(列 2 − 列 1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(列 3 + 列 2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{A2.15}$$

这样的列运算给出的最后形式具有三个独立的列，说明 $\boldsymbol{A}_4$ 是满秩的. 假设

$$\boldsymbol{A}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(列 2 − 列 1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(列 3 − 列 2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{A2.16}$$

初等运算说明这个矩阵的秩是 2；各列之间的关系式是

$$\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = 0$$

另一方面，也可以将行 3 减去行 2，这样便立刻得到两个独立的行

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A2.17}$$

这也表明秩为 2.

可以通过左乘与右乘适当的矩阵来表示初等运算，左乘对应于行变换，右乘对应于列变换. 式 (A2.15) 中最先进行的列运算可表示为

$$\underset{(\boldsymbol{A}_4)}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \tag{A2.18a}$$

接着的运算可表示为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{A2.18b}$$

式 (A2.17) 中 $\boldsymbol{A}_5$ 的行 3 减行 2 的运算表示为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\underset{(\boldsymbol{A}_5)}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A2.19}$$

一个非正方矩阵的秩，也可以利用初等运算来确定，只要将它变换成独立的列(或行)的形式，它的秩通过观察就可看出. 下面给出两个例子，假设

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[(\text{列 } 3 - \text{列 } 1)]{(\text{列 } 2 - \text{列 } 1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{A2.20}$$

列运算的结果说明 $\boldsymbol{B}_1$ 是满秩的(秩是 3). 如果

$$
\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 5 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{(行3 − 行1)}]{\text{(行2 − 行1)}}
$$

$$
\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -3 & -1 & -2\end{bmatrix}
$$

$$
\Big\downarrow \text{(行3 + 行2)}
$$

$$
\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{A2.21}
$$

行运算的结果说明 $\boldsymbol{B}_2$ 的秩是 2.

还可以证明，一个矩阵的秩等于从该矩阵得到的不等于零的行列式的最高阶数. 这一点通过观察形如式(A2.13)的矩阵，是很明显的. 因为从 $\boldsymbol{A}_3$ 可得到三阶行列式

$$
\Delta_3=\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} \tag{A2.22}
$$

而对于 $\boldsymbol{A}_2$，$\Delta_3=0$，但至少可有一个非零二阶行列式

$$
\Delta_2=\beta_{11}\beta_{22} \tag{A2.23}
$$

此外，不等于零的行列式的最高阶数不会受初等运算的影响，因而一个矩阵的秩可以通过研究行列式而得知，无需变换成式(A2.13)的一般形式.

把以上方法应用于式(A2.15)，三阶行列式 Δ_3 为

$$
\Delta_3=(2-3)-(1-1)+2(3-2)=1\neq 0
$$

因此矩阵的秩是 3. 式(2.16)有非零二阶行列式

$$
\Delta_2=2-1\neq 0
$$

但 Δ_3 等于零，因此秩是 2. 行列式的检验法也可以应用到非方矩阵；例如，在式(A2.21)中，从 $\boldsymbol{B}_2$ 选择任意三列所组成的 Δ_3 总是等于零.

A2.3 特征向量，特征值与秩

可以把一般特征向量关系式

$$A\boldsymbol{w}_k = \lambda_k \boldsymbol{w}_k$$

写成

$$[A - \lambda_k I]\boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{0}; \text{ 或 } G(\lambda_k)\boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{0} \tag{A2.24}$$

其中，$G(\lambda_k) = [A - \lambda_k I]$. 对于三维系统的情况，式(A2.24)可以用 $G(\lambda_k)$ 的列和 $\boldsymbol{w}_k$ 的元素表达为

$$[\boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2\ \boldsymbol{g}_3]\begin{bmatrix} w_{k_1} \\ w_{k_2} \\ w_{k_3} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{A2.25a}$$

或

$$\boldsymbol{g}_1 w_{k_1} + \boldsymbol{g}_2 w_{k_2} + \boldsymbol{g}_3 w_{k_3} = \boldsymbol{0} \tag{A2.25b}$$

为了有非零的 $\boldsymbol{w}_k$ 满足式(A2.25)，$\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2$ 和 $\boldsymbol{g}_3$ 不能是独立的（见式(A2.3)），因此 $G(\lambda_k)$ 不可能满秩. 对于三维的情况，如果 $G(\lambda_k)$ 的秩是 2，则式(A2.24)和(A2.25)可以表达为

$$G(\lambda_k)\boldsymbol{w}_k = [\boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2]\begin{bmatrix} 1 & 0 & m_{13} \\ 0 & 1 & m_{23} \end{bmatrix}\boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{0} \tag{A2.26a}$$

或

$$[\boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2]M\boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{0} \tag{A2.26b}$$

式中，$\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 是已经选出的独立的列，因而最终要求

$$M\boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{0} \tag{A2.27}$$

设 M 如上述形式，则一般表达式

$$M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

在 $\boldsymbol{x}$ 中确定两个包含原点的平面，而它们的交线在 $\boldsymbol{x}$ 中确定的方向给出 $\boldsymbol{w}_k$. 因此存在唯一的特征向量与 λ_k 对应. 上述结果适用于单一特征值，也适用于互相耦合的多重特征值 (λ_1) 的第一个特征向量，这时在典型系统中与之对应的约当块有如下形式（对于 $n = 3$）：

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{A2.28}$$

对于 n 维系统，当 $G(\lambda_k)$ 的秩是 $(n-1)$ 时，它有唯一的特征向

量.

作为一般特征向量关系式的特殊情况，具有零特征值的矩阵满足关系式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}_0=\boldsymbol{0} \tag{A2.29}$$

式中，$\boldsymbol{w}_0$ 是相应的特征向量. 上式表明 $\boldsymbol{A}$ 不可能是满秩的，因为如果 $\boldsymbol{A}$ 满秩，$\boldsymbol{w}_0$ 将被变换成一个非零向量. 例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\1&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix} \tag{A2.30}$$

因而有一个零特征值；对应的特征向量满足

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{w}_0=\boldsymbol{0} \tag{A2.31}$$

这便得到(假定 w_{01} 为 1)

$$\boldsymbol{w}_0=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} \tag{A2.32}$$

对于一个三维系统 $\boldsymbol{G}(\lambda_k)$ 的秩可以是 1，那么式(A 2.26)便变成

$$g_1[1\ \ m_2\ \ m_3]\boldsymbol{w}_k=g_1\boldsymbol{m}^T\boldsymbol{w}_k=\boldsymbol{0} \tag{A2.33}$$

这时，一个特征值没有唯一的特征向量以确定固有振型的分布(见式(2.152)). 一般关系式

$$\boldsymbol{m}^T\boldsymbol{x}=0 \tag{A2.34}$$

在 $\boldsymbol{x}$ 中确定一个平面. 在这个平面中的任意两个独立向量都可以取作特征向量，而特征值轨线就在 $\boldsymbol{x}$ 的这个平面中. 相应的典型系统具有如下形式：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_1&0\\0&0&\lambda_2\end{bmatrix} \tag{A2.35}$$

它有两个孤立的特征值.

下面举一些例子. 如果

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix};\quad \lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2 \qquad \text{(A2.36a)}$$

则

$$\boldsymbol{G}(\lambda_1)=[\boldsymbol{A}_1-\lambda_1\boldsymbol{I}]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -2\end{bmatrix} \qquad \text{(A2.36b)}$$

显然它的秩是 1；这表明有一个特征向量解 $\boldsymbol{w}_1$，因为 $n=2$。对于

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix};\quad \left.\begin{array}{l}\lambda_1=-1\\ \lambda_2=-2\\ \lambda_3=-3\end{array}\right\} \qquad \text{(A2.37)}$$

对 λ_1

$$\boldsymbol{G}(\lambda_1)=[\boldsymbol{A}_2-\lambda_1\boldsymbol{I}]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -6 & -11 & -5\end{bmatrix};\quad \left.\begin{array}{l}\Delta_1\neq 0\\ \Delta_2\neq 0\\ \Delta_3=0\end{array}\right\} \qquad \text{(A2.38)}$$

因此秩是 2；这相当于具有一个特征向量，因为 $n=3$。式(A2.38)经初等列运算（列 2—列 1）得到

$$\boldsymbol{G}(\lambda_1)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -6 & -11 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \qquad \text{(A2.39)}$$

它具有两个独立的列（见式(A 2.26)），而为了满足式(A 2.27)必须有

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{0} \qquad \text{(A2.40)}$$

设选择元素 w_{11} 为 1，则给出关系式

$$1+w_{21}=0,\quad w_{21}+w_{31}=0 \qquad \text{(A2.41)}$$

因此

$$\boldsymbol{w}_1=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$$

这正是所预料的，因为 $\boldsymbol{A}_2$ 是同伴形矩阵。

对于多重特征值的情况，$\boldsymbol{G}(\lambda_k)$ 的秩决定了特征值是耦合的

还是孤立的，前者具有式（A2.28）的典型形式，后者具有式（A2.35）的形式．对于

$$A_3=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\5&11&7\end{bmatrix};\quad \left.\begin{matrix}\lambda_1=1,\\ \lambda_2=1,\\ \lambda_3=5\end{matrix}\right\} \tag{A2.42}$$

和

$$G(\lambda_1,\ \lambda_2)=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&1&1\\5&11&6\end{bmatrix};\quad \left.\begin{matrix}\Delta_1\neq 0\\ \Delta_2\neq 0\\ \Delta_3=0\end{matrix}\right\} \tag{A2.43}$$

给出秩是 2．因此，有一个特征向量可以像式（A2.40）那样求出，而且 $\lambda=1$ 是给出式（A2.28）形式的耦合特征值． $\lambda=1$ 的另一个特征向量，可由下列关系式求出（见式（2.142））：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}_1=\lambda_1\boldsymbol{w}_1$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}_2=\lambda_1\boldsymbol{w}_2+\boldsymbol{w}_1$$

如果

$$A_4=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\2&2&1\end{bmatrix};\quad \lambda=-1,\ -1,\ 3 \tag{A2.44}$$

对于 $\lambda=-1$ 可得

$$G(\lambda)=[A_4+I]=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\2&2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}[1\ 1\ 1] \tag{A2.45}$$

显然它的秩是 1．特征向量为满足下式的任意一对独立的向量，

$$[1\ 1\ 1]\boldsymbol{w}=0 \tag{A2.46}$$

例如

$$W_a=\begin{bmatrix}1&1\\-2&1\\1&-2\end{bmatrix};\quad W_b=\begin{bmatrix}1&1\\3&0\\-4&-1\end{bmatrix} \tag{A2.47}$$

其中，W_a 就是式（2.153）和图 2.20 中的 $\boldsymbol{w}_1$，$\boldsymbol{w}_2$．

习　　题

A2.1　用初等运算确定下列矩阵的秩：

$$A_1=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&3&1\\1&1&1\end{bmatrix};\quad A_2=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&3&1\\1&1&2\end{bmatrix};$$

$$A_3=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&1&2&2\\1&2&2&1\\3&1&1&2\end{bmatrix};\quad A_4=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\2&3&2&1\\1&4&2&2\\3&2&1&1\end{bmatrix}$$

并通过计算最高阶行列式验证这些结果。

$$(r(A_1)=3;\ r(A_2)=2;\ r(A_3)=4;\ r(A_4)=3)$$

A2.2　验证下列矩阵的列秩和行秩是一样的：

$$\begin{bmatrix}1&3&1&2&2\\3&2&1&1&4\\1&3&2&1&3\end{bmatrix}$$

(秩=3)

A2.3　对于

$$A_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&-5&-4\end{bmatrix};\quad A_2=\begin{bmatrix}-2&-1&-1\\2&1&2\\1&1&0\end{bmatrix}$$

$$A_3=\begin{bmatrix}-2&-1&-1\\2&-3&2\\1&1&0\end{bmatrix};\quad A_4=\begin{bmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{bmatrix}$$

求特征值，并且根据

$$G(\lambda_k)=[A-\lambda_k I]$$

的秩确定多重特征值是耦合的还是非耦合的。对于非耦合的特征值，求出两对特征向量并验证这两对特征向量都给出预期的典型系统形式

$$\Lambda=W^{-1}AW$$

$$\left(\begin{matrix}A_1 & A_2 & A_3 & A_4\\ \lambda=-1,-1,-2 & \lambda=-1,-1,+1 & \lambda=-1,-1,-3 & \lambda=1,1,5\\ \text{耦合} & \text{不耦合} & \text{耦合} & \text{不耦合}\end{matrix}\right)$$

A2.4　用确定秩的方法研究如下矩阵是否有零特征值：

$$A_1=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix};\quad A_2=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$A_3=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

对于零特征值，作相应系统的根轨迹图来证实所得的结果。

（A_1 和 A_3 有零特征值）

A2.5　选择 m^T（任意）为

$$m^T=[1\ \ 2\ \ 3]$$

并且选择任意两个特征向量 w_1 与 w_2 满足

$$m^T w=0$$

再加上另一个特征向量 w_3（比方）为

$$w_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\end{bmatrix};\quad w_2=\begin{bmatrix}1\\ 4\\ -3\end{bmatrix};\quad w_3=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

选择一对多重特征值和另一个特征值（比方）为

$$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=-2$$

试确定

$$A=W\Lambda W^{-1}$$

并验证 $G(-1)$ 的秩是所预期的。

$$\left(A=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-7 & -2 & -3\\ -1 & -8 & -3\\ -1 & -2 & -9\end{bmatrix}\right)$$

A2.6　对于一般关系式

$$G(s)=[A-sI]$$

引进对角线表达式

$$A=W\Lambda W^{-1}$$

详细展开此式，证明：如果

$$y=G(s)x$$

式中，$s=\lambda_k$ 是任意特征值，那么，y 将不包含 w_k 的任何分量。事实上，$G(\lambda_k)$ 将起一个“特征向量抑制滤波器”的作用。

A2.7　试验证式（A2.39）中两个独立的列

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{g}_1 \ \ \boldsymbol{g}_2]$$

定义了一个包含式（A2.37）的另外两个特征向量 $\boldsymbol{w}_2$ 和 $\boldsymbol{w}_3$ 的平面。为此，可先求出 $\boldsymbol{m}^T$ 满足

$$\boldsymbol{m}^T[\boldsymbol{g}_1 \ \ \boldsymbol{g}_2] = [0 \ 0]$$

然后验证 $\boldsymbol{w}_2$ 和 $\boldsymbol{w}_3$ 满足

$$\boldsymbol{m}^T\boldsymbol{w}_k = [0 \ \ 0]$$

式中，$k = 2, 3$。这就意味着 $\boldsymbol{w}_2$ 和 $\boldsymbol{w}_3$ 位于 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 所确定的平面内。

$$(m_1 = 1(\text{比方}); \ \ \boldsymbol{m}^T = [1 \ \ 5/6 \ \ 1/6])$$

A2.8　对于共轭复特征值 λ_k 与 $\bar{\lambda}_k$，证明

$$\boldsymbol{F} = \mathrm{G}(\lambda_k)\mathrm{G}(\bar{\lambda}_k) = [\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}\mathrm{Re}(\lambda_k)]^2 + \boldsymbol{I}[\mathrm{Im}(\lambda_k)]^2$$

其中，Re() 和 Im() 表示实部和虚部，而 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。由于 $\boldsymbol{F}$ 消去两个复振型的特征向量，因而关系式

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{x} = 0$$

决定了包含有复振型轨线的平面。对于

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

验证上述结果，并求出包含复特征值轨线的平面。验证 $\boldsymbol{F}$ 的独立的列就是 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值的特征向量。

$$(x_1 - x_2 + x_3 = 0)$$

附录3 z变换原理

A3.1 脉冲采样

在采样信号的 z 变换表示法中，假设用理想脉冲进行采样．对连续信号 $f(t)$ 相隔时间 T 进行采样的结果，得到面积为 $f(nT)$ 的一串脉冲序列．这个理想化的采样过程可用图 A3.1 表示，图中被采样的时间函数和单位脉冲序列相乘，得到的输出是这两个输入的乘积．

通常用 $f^*(t)$ 表示输出脉冲序列（这里星号表示采样），并可把它表示为

$$
\begin{aligned}
f^*(t) &= f(0)\delta(t) + f(T)\delta(t-T) + f(2T)\delta(t-2T) \\
&\quad + \cdots + f(nT)\delta(t-nT) + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT) \qquad (A3.1)
\end{aligned}
$$

式中，$\delta(t-nT)$ 表示发生在 $t=nT$ 时的单位脉冲．取这一脉冲序列的拉普拉斯变换得

$$
\begin{aligned}
L[f^*(t)] &= f^*(s) = f(0) + f(T)e^{-sT} \\
&\quad + f(2T)e^{-2sT} + \cdots + f(nT)e^{-snT} + \cdots \qquad (A3.2)
\end{aligned}
$$

式中，e^{-snT} 是在 $t=nT$ 时的单位脉冲的拉普拉斯变换．

在许多连续线性系统里出现的时间函数 $f(t)$ 都可表示为一般的指数函数和的形式

$$
f(t) = r_1e^{s_1t} + r_2e^{s_2t} + \cdots + r_ke^{s_kt} \qquad (A3.3)
$$

其相应的拉普拉斯变换为

$$
\begin{aligned}
f(s) &= \frac{r_1}{(s-s_1)} + \frac{r_2}{(s-s_2)} + \cdots + \frac{r_k}{(s-s_k)} \\
&= \frac{N(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_k)} \qquad (A3.4)
\end{aligned}
$$

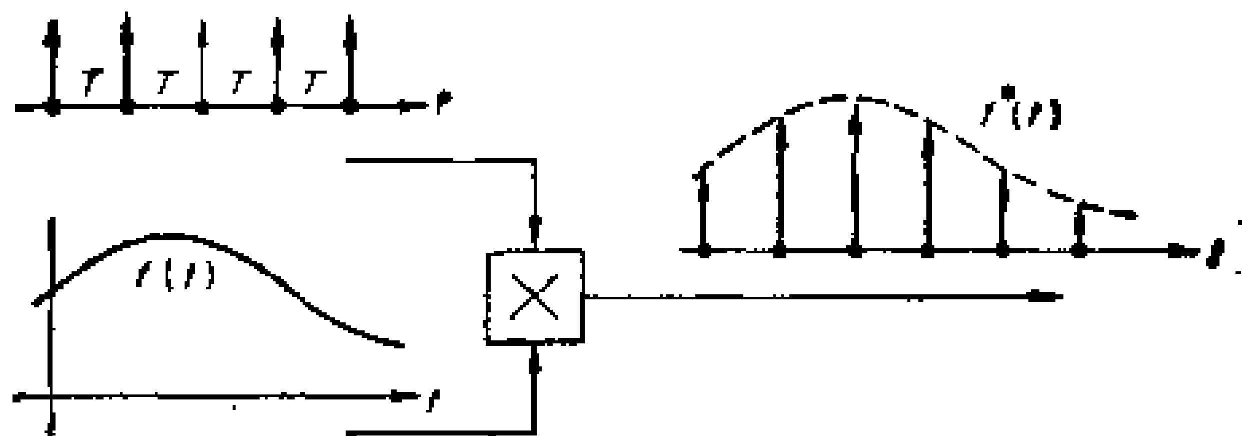


图 A3.1 脉冲采样

式中，$N(s)$ 给出 s 平面零极点图中的零点。倘若形如式(A3.3)的 $f(t)$ 被脉冲采样的话，则 $f^*(t)$ 等于每一项指数分量的脉冲序列的总和。因此，由每项指数分量

$$f_k(t) = r_k e^{s_k t}$$

可得

$$f_k^*(s) = r_k(1 + e^{s_k T}e^{-sT} + e^{2s_k T}e^{-2sT} + \cdots) \qquad \text{(A3.5a)}$$

上式可写成闭合形式

$$f_k^*(s) = \frac{r_k}{1 - e^{s_k T}e^{-sT}} = \frac{r_k}{1 - e^{-(s-s_k)T}} \qquad \text{(A3.5b)}$$

令

$$e^{-(s-s_k)T} = 1 \qquad \text{(A3.6)}$$

可求出 s 平面上的极点，它们是

$$s = s_k \pm j2n\pi/T, \quad n = 0, 1, \cdots \qquad \text{(A3.7)}$$

$n=0$ 时的极点就是式(A3.4)中连续系统原来的极点，而当 $n=1, 2, \cdots$ 时，得到彼此相隔 $\pm j2\pi/T$ 的无限多个附加极点，如图 A3.2(a) 所示。可把 s 平面分成若干条带 $\cdots s_{-1}, s_0, s_1, \cdots$，每条带的宽度是 $2\pi/T$，在各条带上每一个极点的相对位置是相同的。

A3.2 z 变 换

无限多个极点的出现使 s 域分析复杂化，采用下面的代换，然后在 z 平面上讨论上述结果，可使问题大为简化。

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma+j\omega)T}$$

由上式得

$$|z| = e^{\alpha T};\ \angle z = \omega T \tag{A3.8}$$

由式(A3.8)可见，在带 S_0 里的直线 P_1，P_2 和 P_3 映射到 z 平面上的映象是圆(图 A3.2(b))，而在 s 平面上沿着虚轴的直线 P_2 映射到 z 平面上的映象是单位圆. 带 S_0 的映象覆盖了整个 z 平面；其左半部(稳定)在 z 平面上的映象是单位圆内的部分；而其右半部(不稳定)的映象就是单位圆以外的部分. 极点 S_k 映射到单位圆以内在半径 $e^{\alpha T}$ 处，如图 A3.2(c) 所示. 在 s 平面上每条带 $S_{\pm1}$，$S_{\pm2}$，…都映射为整个 z 平面(严格来说，这些映象平面重叠在 z 平面上)，每条带里相应的极点映射在 z 平面上为同一个点.因此，s 平面上的无限多个极点就被简化为 z 平面上一个单一的极点.

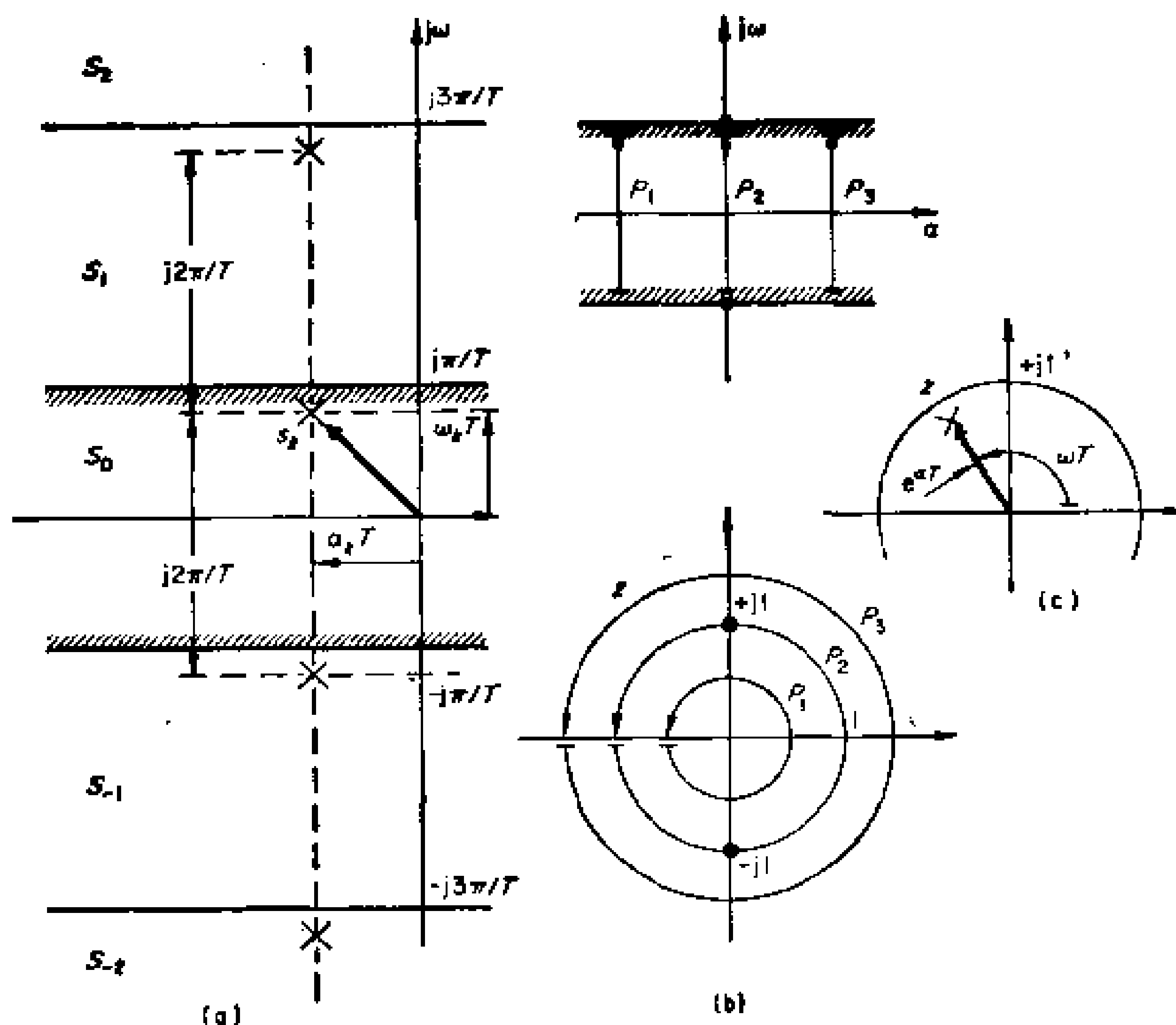


图 A3.2 s 平面与 z 平面之间关系：(a) 由于采样在 s 平面上形成的附加极点；(b) s 平面与 z 平面之间的映象；(c) 在 z 平面上极点位置

上述关系式

$$z = e^{sT}$$

意味着

$$e^{-sT} = z^{-1}$$

将上式代入式 (A3.5) 得

$$f(z) = r_k(1 + e^{s_k T}z^{-1} + e^{2s_k T}z^{-2} + \cdots + e^{s_k nT}z^{-n} + \cdots) \tag{A3.9a}$$

$$= \frac{r_k}{1 - e^{s_k T}z^{-1}} = \frac{z r_k}{z - e^{s_k T}} \tag{A3.9b}$$

上式就是一般的指数信号 $r_k e^{s_k t}$ 的脉冲采样的 z 变换，其采样间隔为 T. 在 z 平面上，这个变换的特征是在 $z = e^{s_k T}$ 处有极点和在原点处有零点. 式 (A3.3) 的 z 变换是各个分量的变换的和，

$$f(z) = \frac{r_1 z}{z - z_1} + \frac{r_2 z}{z - z_2} + \cdots \tag{A3.10}$$

式中，$z_1 = e^{s_1 T}$, $z_2 = e^{s_2 T}$, $\cdots$，把各分量合并后得到一个多项式之比：

$$f(z) = \frac{N(z)}{(z - z_1)(z - z_2)\cdots} \tag{A3.11}$$

它的极点与 $f(t)$ 各分量的极点对应，但分子的零点就不同于 $f(s)$ 的零点. $f(s)$ 在左半平面的极点对应于 z 平面上位于单位圆内的极点.

A3.3 z 平面上的极点和时间函数之间的关系

一个一般的指数函数 $e^{s_k t}$ 可以用一个长度不断变化的旋转向量来表示，如图 A3.3 (a) 所示. 式 (A3.5a) 和式 (A3.9a) 中各项系数决定着 $t = 0, T, 2T, \cdots$ 时此旋转向量的瞬时位置. 因此极点的角度(图 3.2(c) 中的 ωT) 是这个旋转向量在一个采样间隔内转过的角度，而极点的半径 ($e^{\sigma T}$) 表明旋转向量幅值在一个采样间隔内增加或减少的比率. 在这种意义上，可以认为 z 平面上的极点描述了对相应的连续信号多次采样的情况. 显然，在图 A3.3(b) 单位圆上的极点相当于等幅信号，而衰减信号相当于极点在单位

圆内，增幅信号相当于极点在单位圆外．复数极点共轭成对地出现，其虚数部分对消后得到实数的结果．正实轴($\angle z = 0°$)上的极点相当于实指数信号，而负实轴($\angle z = 180°$)上的极点相当于每周期有两次采样的振荡信号．当振荡信号的采样率减少到每周期两次以下时，z平面上的极点就穿过负实轴；这时从极点的位置可能会对信号作出错误的解释．这个结果是奈魁斯特采样定理在z平面上的表现，定理指出：当采样速率至少两倍于在连续信号中出现的最高频率时，连续信号才可能精确地从采样信号复原．对于复数极点来说，角度(ωT)仅表示在一个采样间隔里旋转向量角度的变化，它亦可以由每一振荡周期里采样的次数N来说明，即

$$N = 2\pi/\omega T$$

但在每周期里并没有给出采样的位置．采样位置由极点的留数来确定(式(A3.9b)的r_k)，它取决于z平面的其他极点和零点，正如在s平面上那样．

上面讲述的概念把极点与连续信号的脉冲采样序列联系起来，并提供了一个有用的一般方法．对于有任意极点位置的连续信号，用这个方法能够得到此信号的采样序列值．然而，即使我们

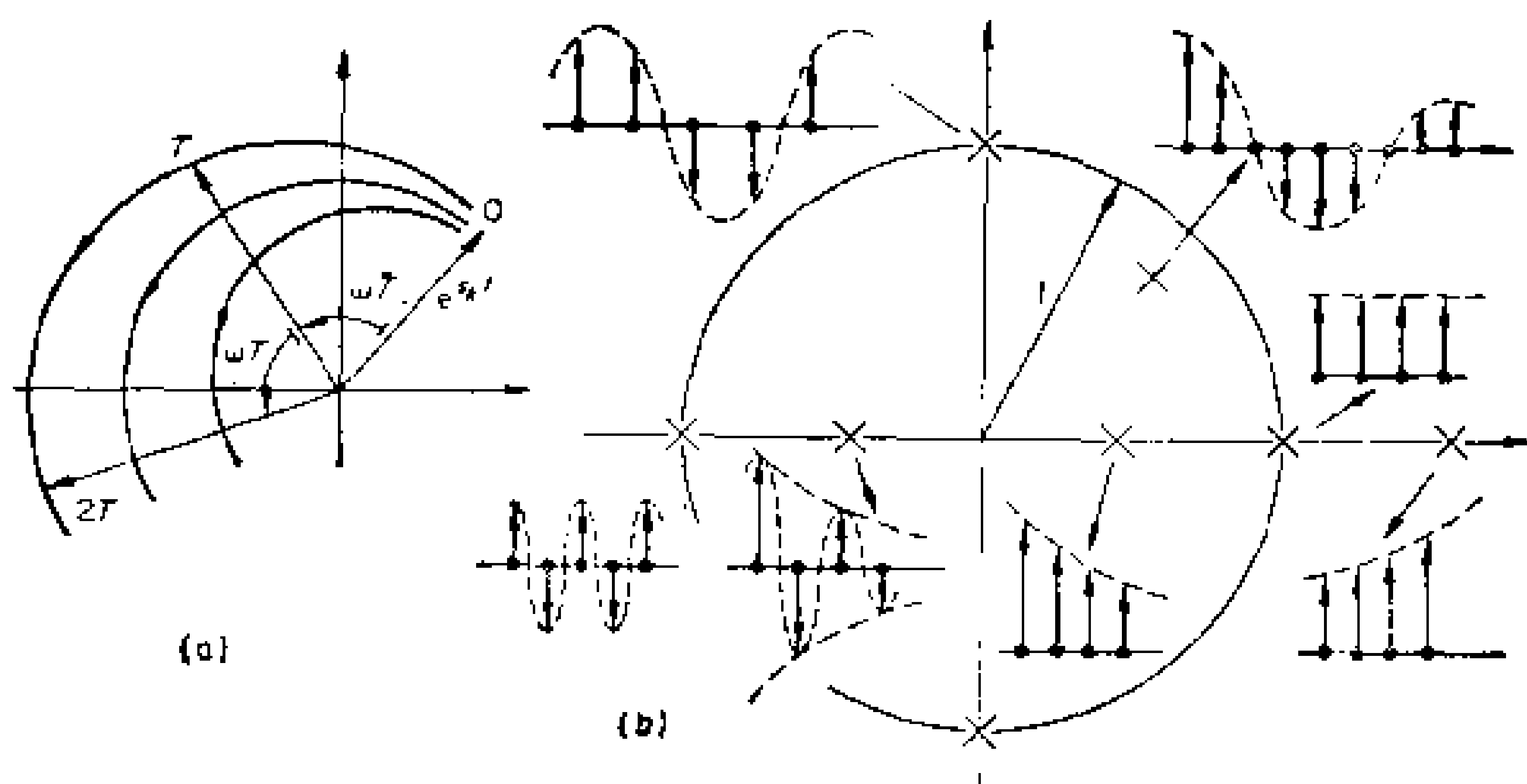


图 A3.3　z平面的极点与时间函数之间的关系：(a) 一般的指数函数；(b) 极点与时间函数

用 z 变换分析的系统完全是离散的（没有连续的信号），上面介绍的极点与连续信号的关系仍然使我们有可能估计系统的采样序列值的形式.

正如 s 平面的零点意味着与零点位置对应的特定信号不被传送那样，z 平面的零点意味着与零点位置对应的脉冲序列输入不会产生输出序列. 这种零点可能由系统的内部结构产生，它抵消了某个特定的输入脉冲序列.

A3.4 具有离散和连续部分的系统

对纯离散系统，z 变换分析法用来表示一个数值的序列，它们与任何连续响应之间没有联系. 对于既有离散部分又有连续部分的系统，不可能实现应用 z 变换分析法所必需的理想的脉冲采样，然而，实际上这是无关紧要的限制. 通常的情况如图 A3.4(a) 所示，在图中传递函数为 $G(s)$ 的连续系统有一个阶梯状的控制 $u(kT)$；这可以是由一个连续输入采样后经计算所得到的控制信号的数模转换. 这个连续输入可以是误差信号 $e(t)$.

为了应用 z 变换分析法，可认为这个误差信号经脉冲采样（如图 A3.4(b)），得到信号 $e^*(t)$，或 $e(z)$. 由这些采样，经控制环节得到一串控制脉冲序列 $u^*(t)$ 或 $u(z)$. 在 z 域里控制环节可表示为

$$u(z) = D(z)e(z) \tag{A3.12}$$

然后控制脉冲序列被送到一个（理论的）保持单元，它具有阶梯形状的输出 $u(T)$, $u(2T)$, $\cdots$, $u(kT)$, $\cdots$，这些输出的幅值等于在每一采样间隔开始时所施加脉冲的面积. 这个阶梯状输出是实际的控制信号，它是由误差信号采样后按式（A3.12）计算并经数模转换得到的控制信号.

为了得到前向通道的 z 变换，我们把一个单位脉冲加到保持单元去，它给出持续时间为 T 的单位阶跃输出（如图 A3.4(c)）. 这个保持单元的输出可以表示为初始的正单位阶跃和延迟 T 后的负单位阶跃之和. 在线性系统中，每一个阶跃输入都使前向通道产

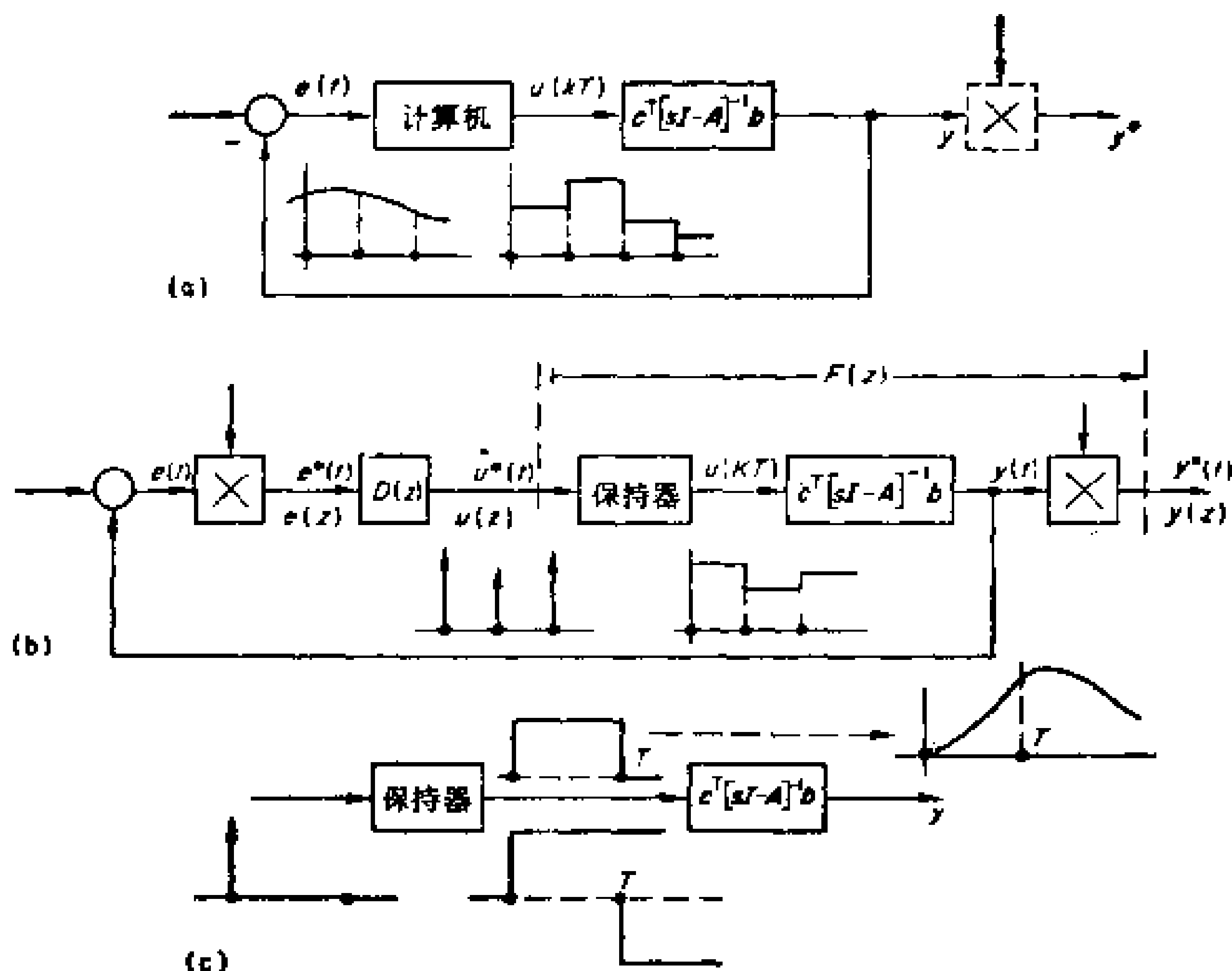


图 A3.4　具有连续部分的采样-数据系统：(a) 系统；(b) 脉冲采样的说明；(c) 保持单元的特性

生阶跃响应，它通常由一些指数函数信号构成．在 z 域分析里，输出是脉冲序列 y^*，它是由一个虚构的采样器对连续输出信号进行采样而得到的(如图 A3.4(a))．对一个阶跃输入，采样输出为

$$Z(\text{在 } y \text{ 处的连续阶跃响应})$$

式中，$Z()$ 表示 z 变换．把一个脉冲加到保持单元，由此而在 y^* 处产生的脉冲序列的 z 变换就是

$$F(z)=(1-Z^{-1})Z\ (\text{阶跃响应}) \qquad (A3.13)$$

式中，$(1-z^{-1})$ 表示正阶跃和延迟的负阶跃．

如果系统有反馈的话，那么

$$e=v-y$$

因为采样是线性过程，采样后有

$$e^*=v^*-y^*$$

所以，在 z 域里

$$e(z) = v(z) - y(z) \tag{A3.14}$$

对整个前向通道有

$$y(z) = F(z)u(z) = F(z)D(z)e(z)$$

把式 (A3.14) 代入后得到闭环传递函数为

$$\frac{y(z)}{v(z)} = T(z) = \frac{F(z)D(z)}{1 + F(z)D(z)} \tag{A3.15a}$$

或者假设在前向通道中没有控制环节，则

$$T(z) = \frac{F(z)}{1 + F(z)} \tag{A3.15b}$$

A3.5 闭环极点，根轨迹法

对于如图 A3.4(a) 的单回路系统，其闭环极点由式 (A3.15a) 或 (A3.15b) 中

$$D(z)F(z) + 1 = 0 \quad 或 \quad F(z) + 1 = 0$$

求得，也可应用根轨迹法通过观察 $D(z)F(z)$ 或 $F(z)$ 的 180° 线来得到这些极点. 像连续系统那样，分析以某一增益 K 为参数的闭环极点的变化可以有效地定性地揭示出系统的一般行为. 对于前向通道有如图 A3.5 所示零极点图的系统，在正实轴上有三个极

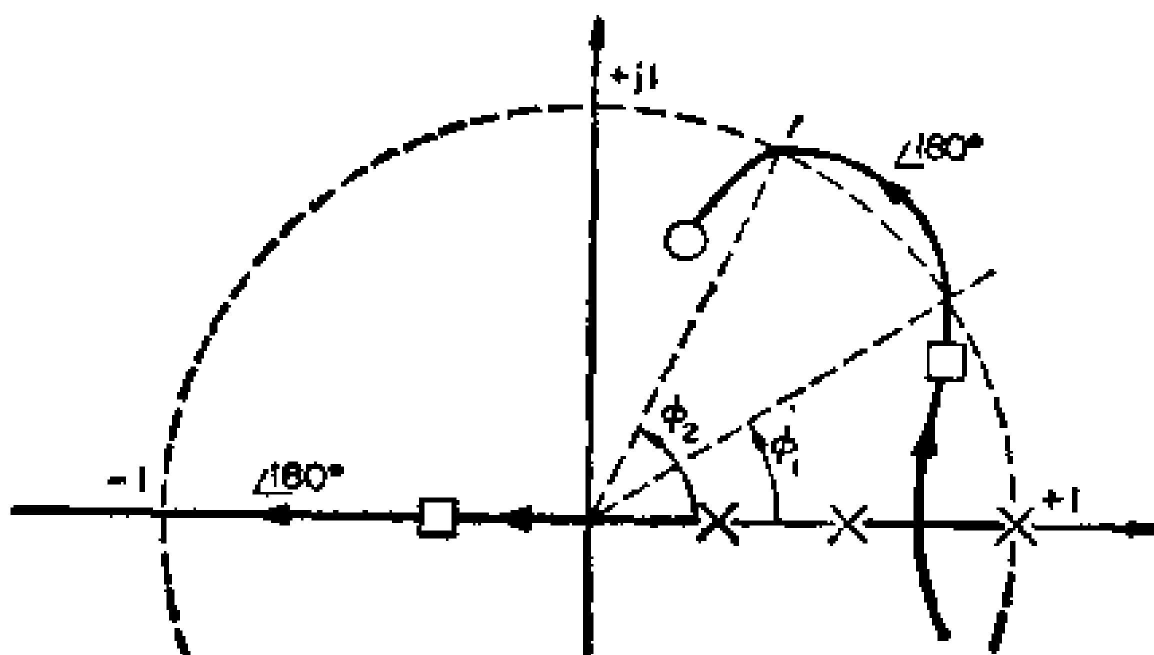


图 A3.5 由根轨迹决定系统特性

点及一对复数零点，180° 线如图所示. 当 K 增加时，在 K 值的某

一范围内，终端在零点的 180° 线上的这些极点是不稳定的．如果图中 $\phi_1 \simeq 30°$，当 K 增加到使系统刚好开始不稳定时，振荡周期大约是 $12T$．如果 $\phi_2 \simeq 60°$，则当 K 进一步增加到使振荡周期大约为 $6T$ 以后，系统又变成稳定的了．实轴上的闭环极点初时对应于较快的指数衰减（正实轴），然后变化成周期为 $2T$ 的强阻尼振荡分量（负实轴）．当 K 增加时，阻尼减小．极点最后经过 $z=-1$ 点，振型就变成不稳定的了。

索　　引

一　画

二　画

三　画

四　画

五　画

六 画

七 画

八 画

九 画

十 画

十一画

十二画

十三画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十五画

十 五 画

十五画

十五画

十五画

十五画